

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

NGUYỄN ĐĂNG ĐIỀM

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ
HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH
ỨNG XỬ CƠ HỌC CỦA DẦM, CỘT XÉT
TỚI PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN TÍNH
CHẤT VẬT LIỆU

Ngành: CƠ KỸ THUẬT

Mã số: 9520101

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hà Nội - 2026

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

NGUYỄN ĐĂNG ĐIỀM

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU
HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỨNG XỬ CƠ
HỌC CỦA DẦM, CỘT XÉT TỚI PHÂN BỐ NGẪU
NHIÊN TÍNH CHẤT VẬT LIỆU

Ngành: CƠ KỸ THUẬT
Mã số: 9520101

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hướng dẫn khoa học

- PGS. TS. Tạ Duy Hiền
- PGS. TS. Đào Sỹ Đán

Hà Nội - 2026

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của cá nhân tôi. Toàn bộ các kết quả nghiên cứu, phân tích và kết luận trình bày trong luận án đều trung thực và chưa từng được sử dụng để bảo vệ bất kỳ học vị nào trước đây.

Hà Nội, ngày tháng năm

Tác giả

Nguyễn Đăng Điềm

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới gia đình, những người luôn đồng hành, động viên, chia sẻ và hỗ trợ tinh thần cũng như vật chất trong suốt quá trình thực hiện nghiên cứu này.

Tôi xin chân thành cảm ơn PGS.TS. Tạ Duy Hiền và PGS.TS. Đào Sỹ Đán, những người thầy đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo tôi trong suốt quá trình thực hiện nghiên cứu và hoàn thiện luận án.

Tôi xin cảm ơn Bộ môn Kết cấu, Bộ môn Sức bền vật liệu và Khoa Công trình, Trường Đại học Giao thông Vận tải đã tạo điều kiện và hỗ trợ nghiên cứu sinh trong quá trình học tập và nghiên cứu. Đồng thời xin gửi lời cảm ơn đến Bộ môn Kỹ thuật kết cấu, Khoa Công trình Phân hiệu tại TP Hồ Chí Minh tạo điều kiện thuận lợi để nghiên cứu sinh tham gia học tập và nghiên cứu.

Xin cảm ơn Phòng đào tạo sau đại học, Trường Đại học Giao thông vận tải đã tổ chức đào tạo chuyên nghiệp, tạo môi trường học tập, nghiên cứu thuận lợi để tôi có thể hoàn thành chương trình nghiên cứu sinh và luận án này.

Cuối cùng, tôi xin trân trọng cảm ơn các thành viên Hội đồng đánh giá luận án đã dành thời gian đọc, nhận xét và góp ý để giúp tôi hoàn chỉnh nội dung nghiên cứu một cách tốt nhất.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU	1
1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI	1
2. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU	2
3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU.....	3
4. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ Ý NGHĨA THỰC TIỄN CỦA LUẬN ÁN	3
5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	4
CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH NGẪU NHIÊN KẾT CẤU	5
1.1. BIẾN NGẪU NHIÊN	5
1.2. TRƯỜNG NGẪU NHIÊN.....	5
1.3. TỔNG QUAN CÁC PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN	8
1.3.1. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian	8
<i>1.3.1.1. Nhóm các phương pháp biểu diễn điểm</i>	<i>8</i>
<i>1.3.1.2. Nhóm các phương pháp biểu diễn trung bình</i>	<i>9</i>
<i>1.3.1.3. Nhóm các phương pháp mở rộng chuỗi biểu diễn trường ngẫu nhiên.....</i>	<i>11</i>
1.3.2. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian.....	16
<i>1.3.2.1. Các phương pháp biến đổi tương quan</i>	<i>16</i>
<i>1.3.2.2. Các phương pháp dựa trên triển khai đa thức nhiễu động.....</i>	<i>17</i>
1.4. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN	18
1.4.1. Phương pháp mô phỏng Monte Carlo	18
1.4.2. Phương pháp nhiễu loạn	20
1.4.3. Phương pháp tiếp cận phổ	21
1.5. TỔNG QUAN VỀ CÁC NGHIÊN CỨU CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG CỦA LUẬN ÁN.....	25
1.5.1. Tổng quan ứng dụng của phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên trong các lĩnh vực khoa học	25
1.5.2. Tình hình nghiên cứu ngoài nước.....	27
<i>1.5.2.1. Tổng quan các nghiên cứu phân tích tĩnh ngẫu nhiên kết cấu dầm</i>	<i>27</i>
<i>1.5.2.2. Tổng quan các nghiên cứu phân tích dao động ngẫu nhiên của dầm, ổn định ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm</i>	<i>28</i>

1.5.2.3. Tổng quan các nghiên cứu phân tích ngẫu nhiên dầm phân lớp chức năng (FGM)	30
1.5.3. Tình hình nghiên cứu trong nước.....	32
1.5.4. Đánh giá tổng quan và vấn đề nghiên cứu.....	33
1.6. KẾT LUẬN CHƯƠNG I.....	35
CHƯƠNG II: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH TĨNH VÀ ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM PHẪNG CHỊU UỐN CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN	37
2.1. MÔ HÌNH BÀI TOÁN	37
2.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN BẰNG KỸ THUẬT TÍCH PHÂN TRỌNG SỐ BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN CỦA TÍNH CHẤT VẬT LIỆU	41
2.2.1. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều	41
2.2.2. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều	44
2.2.3. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều	47
2.2.4. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều.....	48
2.3. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN TĨNH.....	50
2.4. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH	55
2.4.1. Phân tích dao động uốn tự do của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn	55
2.4.2. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian	57
2.5. PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MÔ PHỎNG MONTE CARLO	65
2.5.1. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên hai chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ.....	66

2.5.2. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên ba chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ.....	68
2.5.3. Phân tích đáp ứng tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo.....	69
2.5.4. Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo	72
2.6. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN.....	77
2.6.1. Đánh giá hiệu ứng thứ cấp và cơ sở áp dụng mô hình dầm phẳng cho bài toán tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều.....	77
2.6.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên đáp ứng của dầm theo mật độ lưới chia phần tử	80
2.6.3. Kiểm tra mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên	82
2.6.4. Kiểm chứng mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố	84
2.6.4.1. Kiểm chứng bài toán phân tích ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian.....	84
2.6.4.2. Kiểm chứng bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian.....	85
2.6.5. So sánh kết quả phân tích đáp ứng của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo	86
2.7. KẾT LUẬN CHƯƠNG II.....	92
CHƯƠNG III: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN.....	94
3.1. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỘT CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN	94
3.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH EULER.....	96

3.3. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER NGẪU NHIÊN CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG MÔ PHỎNG MONTE CARLO.....	104
3.4. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN	108
3.4.1. Đối sánh mô hình dầm phẳng và không gian trong phân tích ổn định ngẫu nhiên	108
3.4.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên lực tới hạn theo mật độ lưới chia phần tử	109
3.4.3. Kiểm tra mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên.....	111
3.4.4. Kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố	113
3.4.5. So sánh kết quả phân tích ổn định Euler của cột bằng phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo	114
3.5. KẾT LUẬN CHƯƠNG III	118
CHƯƠNG IV: KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC YẾU TỐ TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN ĐẶC TRƯNG THỐNG KÊ ĐÁP ỨNG CỦA DẦM, CỘT	119
4.1. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐÁP ỨNG TỈNH NGẪU NHIÊN CỦA DẦM CÓ MÔ ĐUN ĐÀN HỒI NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN.....	119
4.1.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên	120
<i>4.1.1.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều</i>	<i>120</i>
<i>4.1.1.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều</i>	<i>120</i>
4.1.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên của chuyển vị	122
<i>4.1.2.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều</i>	<i>122</i>
<i>4.1.2.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều</i>	<i>122</i>
4.1.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của chuyển vị và hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian.....	123

4.1.4. So sánh ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....	124
4.2. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN	125
4.2.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến hệ số biến thiên giá trị riêng.....	125
4.2.1.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều.....	125
4.2.1.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều.....	127
4.2.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng.....	128
4.2.2.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều.....	128
4.2.2.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều.....	128
4.2.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của giá trị riêng và hệ số biến thiên của tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian	131
4.2.3.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều.....	131
4.2.3.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều.....	131
4.2.4. Phân tích ảnh hưởng mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng	132
4.2.5. So sánh phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều	133
4.3. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN	136
4.3.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan của trường ngẫu nhiên đến hệ số biến thiên lực tới hạn	137
4.3.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên lực tới hạn.....	138
4.3.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên lực tới hạn và hệ số biến thiên mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian.....	140
4.3.4. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến hệ số biến thiên lực tới hạn ..	141
4.3.5. So sánh ổn định Euler của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều	142

4.4. KẾT LUẬN CHƯƠNG IV	144
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	146
DANH MỤC CÁC CÔNG BỐ KHOA HỌC	149
TÀI LIỆU THAM KHẢO	150
PHỤ LỤC A: ẢNH HƯỞNG CỦA CHIỀU DÀI TƯƠNG QUAN ĐẾN COV ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT	161
PHỤ LỤC B: QUAN HỆ GIỮA COV TÍNH CHẤT VẬT LIỆU VÀ COV ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT	168
PHỤ LỤC C: ẢNH HƯỞNG ĐỘ LỆCH CHUẨN, HỆ SỐ TƯƠNG QUAN CÁC TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN COV GIÁ TRỊ RIÊNG	172
PHỤ LỤC D: SO SÁNH KỲ VỌNG, COV ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT ĐƯỢC XÁC ĐỊNH BẰNG SFEM VÀ MCS	177
PHỤ LỤC E: CHƯƠNG TRÌNH TÍNH	192

DANH MỤC HÌNH ẢNH

Hình 1.1. E và ρ của dầm FGM	31
Hình 2.1. Dầm có E ngẫu nhiên hai chiều	37
Hình 2.2. Dầm có E ngẫu nhiên ba chiều.....	38
Hình 2.3. Mô hình của phần tử kết cấu dầm.....	41
Hình 2.4. Các bước phân tích đáp ứng tĩnh ngẫu nhiên bằng SFEM	54
Hình 2.5. Mode dao động thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn.....	56
Hình 2.6. Sai số của tần số góc dao động riêng xác định bằng FEM và giải tích	57
Hình 2.7. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng SFEM.....	65
Hình 2.8. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên $f(x,y)$	67
Hình 2.9. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên $g(x,y)$	68
Hình 2.10. Sơ đồ tổng quát phân tích tĩnh ngẫu nhiên bằng MCS	72
Hình 2.11. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng MCS.....	77
Hình 2.12. Hệ số biến thiên chuẩn hóa của hiệu ứng thứ cấp	78
Hình 2.13. Kiểm chứng sự hội tụ của COV chuyển vị theo lưới chia phần tử.....	81
Hình 2.14. Kiểm chứng sự hội tụ của COV của giá trị riêng trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều	82
Hình 2.15. Kiểm chứng sự hội tụ của COV của giá trị riêng trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều	82
Hình 2.16. COV của chuyển vị khi yếu tố ngẫu nhiên đầu vào có độ lệch nhỏ	83
Hình 2.17. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều	83
Hình 2.18. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều	83
Hình 2.19. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của chuyển vị chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên hai chiều ($d = 0,01L$).....	87
Hình 2.20. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của chuyển vị chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều ($d = 0,01L$).....	88
Hình 2.21. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của giá trị riêng chuẩn hóa trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($d = 0,01L, \gamma = 0$)	88
Hình 2.22. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của giá trị riêng chuẩn hóa trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d = 0,01L, \gamma = 0$).....	89
Hình 2.23. So sánh COV của chuyển vị xác định bằng SFEM và MCS	90

Hình 2.24. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều xác định bằng SFEM và MCS	90
Hình 2.25. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS.....	90
Hình 2.26. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$).....	91
Hình 2.27. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS	91
Hình 2.28. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS.....	91
Hình 2.29. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$)	92
Hình 3.1. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng SFEM	104
Hình 3.2. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng MCS	107
Hình 3.3. Kiểm tra sự hội tụ phụ thuộc vào lưới chia phần tử của COV lực tới hạn trong trường hợp ngẫu nhiên hai chiều	110
Hình 3.4. Kiểm tra sự hội tụ phụ thuộc vào lưới chia phần tử của COV lực tới hạn trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều.....	111
Hình 3.5. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều.....	112
Hình 3.6. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều.....	112
Hình 3.7. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của tải trọng tới hạn chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên hai chiều ($d = 0,01L$)	115
Hình 3.8. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của tải trọng tới hạn chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều ($d = 0,01L$)	116
Hình 3.9. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều	117
Hình 3.10. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều	117
Hình 4.1. Sơ đồ dầm giản đơn	119
Hình 4.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian hai chiều đến COV của chuyển vị	120

Hình 4.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian ba chiều đến COV của chuyển vị	121
Hình 4.4. Ảnh hưởng của σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của chuyển vị	122
Hình 4.5. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của chuyển vị	123
Hình 4.6. Quan hệ giữa COV của chuyển vị và COV của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ..	123
Hình 4.7. So sánh ứng xử tĩnh của dầm trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều	124
Hình 4.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều	125
Hình 4.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều	126
Hình 4.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($\gamma = -0,5$)	126
Hình 4.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($\gamma = 0$)	126
Hình 4.12. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($\gamma = 0,5$)	127
Hình 4.13. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên)	129
Hình 4.14. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên)	129
Hình 4.15. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -1,0$)	129
Hình 4.16. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -0,5$)	130
Hình 4.17. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0$)	130
Hình 4.18. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0,5$)	130

Hình 4.19. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 1,0$)	131
Hình 4.20. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....	133
Hình 4.21. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....	134
Hình 4.22. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....	134
Hình 4.23. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều	134
Hình 4.24. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều	135
Hình 4.25. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = -0,5$).....	135
Hình 4.26. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = 0$)	135
Hình 4.27. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = 0,5$).....	136
Hình 4.28. Sơ đồ tính cột chịu nén đúng tâm	136
Hình 4.29. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều	137
Hình 4.30. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của lực tới hạn	139
Hình 4.31. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của lực tới hạn.....	139
Hình 4.32. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi.....	140
Hình 4.33. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi.....	141
Hình 4.34. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều	142

Hình 4.35. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều	142
Hình 4.36. So sánh COV của lực tới hạn, E ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....	143
Hình 4.37. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều.....	144
Hình A.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$).....	161
Hình A.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$).....	161
Hình A.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)	161
Hình A.4. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$)	162
Hình A.5. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$)	162
Hình A.6. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$).....	162
Hình A.7. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z, \gamma = -0,5$)	163
Hình A.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z, \gamma = -0,5$)	163
Hình A.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y, \gamma = -0,5$)	163
Hình A.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z, \gamma = 0$).....	164
Hình A.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z, \gamma = 0$).....	164
Hình A.12. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y, \gamma = 0$).....	164
Hình A.13. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z, \gamma = 0,5$).....	165

Hình A.14. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z, \gamma = 0,5$).....	165
Hình A.15. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y, \gamma = 0,5$).....	165
Hình A.16. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$).....	166
Hình A.17. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$).....	167
Hình A.18. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)	167
Hình B.1. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi.....	168
Hình B.2. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mật độ khối lượng	168
Hình B.3. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = -0,5$)	168
Hình B.4. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0$).....	169
Hình B.5. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0,5$).....	169
Hình B.6. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi.....	169
Hình B.7. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mật độ khối lượng	170
Hình B.8. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = -0,5$)	170
Hình B.9. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0$).....	170
Hình B.10. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0,5$).....	171

Hình C.1. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên).....	172
Hình C.2. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên)	172
Hình C.3. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -1,0$)	172
Hình C.4. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -0,5$)	173
Hình C.5. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0$)	173
Hình C.6. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0,5$)	173
Hình C.7. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 1,0$)	174
Hình C.8. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,05$)	174
Hình C.9. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,10$)	174
Hình C.10. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,15$)	175
Hình C.11. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,20$)	175
Hình C.12. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,05$)	175
Hình C.13. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,10$)	176
Hình C.14. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,15$)	176
Hình C.15. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,20$)	176

Hình D.1. So sánh COV chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều	177
Hình D.2. So sánh COV chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều	177
Hình D.3. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều	177
Hình D.4. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều	178
Hình D.5. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$, $\gamma = -0,5$)	178
Hình D.6. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$, $\gamma = -0,5$)	179
Hình D.7. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$, $\gamma = 0$)	180
Hình D.8. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$, $\gamma = 0$).....	180
Hình D.9. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$, $\gamma = 0,5$)	181
Hình D.10. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$, $\gamma = 0,5$).....	182
Hình D.11. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$, $\gamma = -0,5$)	182
Hình D.12. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$, $\gamma = -0,5$)	183
Hình D.13. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$, $\gamma = 0$).....	184
Hình D.14. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$, $\gamma = 0$).....	184
Hình D.15. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$, $\gamma = 0,5$).....	185

Hình D.16. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$, $\gamma = 0,5$).....	186
Hình D.17. So sánh COV lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$)	186
Hình D.18. So sánh COV lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$)	187
Hình D.19. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$)	188
Hình D.20. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$)	188
Hình D.21. So sánh COV lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$).....	189
Hình D.22. So sánh COV lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$).....	190
Hình D.23. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$).....	190
Hình D.24. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$).....	191
Hình E.1. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán tĩnh	192
Hình E.2. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính.....	204
Hình E.3. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán ổn định	217

DANH MỤC BẢNG, BIỂU

Bảng 2.1. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và không gian ($d = 0,01L$)	80
Bảng 2.2. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và không gian ($d = 0,1L$)	80
Bảng 2.3. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và không gian ($d = L$)	80
Bảng 2.4. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác	85
Bảng 2.5. So sánh độ lệch chuẩn của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác	85
Bảng 2.6. So sánh COV của giá trị riêng thứ nhất bằng SFEM với công bố [63].....	86
Bảng 3.1. So sánh đặc trưng thống kê của lực tới hạn theo mô hình dầm phẳng và dầm không gian.....	109
Bảng 3.2. Kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa không thứ nguyên theo [136]	114
Bảng 3.3. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136]...	114
Bảng 3.4. So sánh COV của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136]	114

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Từ viết tắt	Tiếng Anh	Tiếng Việt
COV	Coefficient of Variation	Hệ số biến thiên
CDF	Cumulative Distribution Function	Hàm phân phối tích lũy
E	Young's Modulus	Mô đun đàn hồi
$\mathbb{E}$	Expected Value / Expectation	Kỳ vọng, giá trị kỳ vọng
FGM	Functionally Graded Material	Vật liệu cơ tính biến thiên
FEM	Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn
K-L	Karhunen–Loève Expansion	Khai triển Karhunen–Loève
MCS (MCs)	Monte Carlo Simulations	Mô phỏng Monte Carlo
PCE	Polynomial Chaos Expansion	Khai triển đa thức nhiễu động
PDF	Probability Density Function	Hàm mật độ xác suất
PFEM	Probabilistic Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn xác suất
SFEM	Stochastic Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên
SSFEM	Stochastic Spectral Finite Element Method	Phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên tiếp cận phổ
SRM	Spectral Representation Method	Phương pháp biểu diễn phổ
Var	Variance	Phương sai
ρ	Mass Density	Mật độ khối lượng
$1D$	One-dimensional	Một chiều
$2D$	Two-dimensional	Hai chiều
$3D$	Three-dimensional	Ba chiều
$1V$	One-variable	Đơn biến

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu	Thông số	Thứ nguyên
x	Trục tọa độ dọc theo chiều dài	[Chiều dài]
y	Trục tọa độ dọc theo chiều cao mặt cắt ngang	[Chiều dài]
z	Trục tọa độ dọc theo bề rộng mặt cắt ngang	[Chiều dài]
t	Thời gian	s
h	Chiều cao của mặt cắt ngang hình chữ nhật	[Chiều dài]
b	Bề rộng của mặt cắt ngang hình chữ nhật	[Chiều dài]
L	Chiều dài nhịp tính toán	[Chiều dài]
A_e	Diện tích mặt cắt	[Chiều dài] ²
V_e	Thể tích của phần tử	[Chiều dài] ³
d_x	Chiều dài tương quan không gian theo trục x	[Chiều dài]
d_y	Chiều dài tương quan không gian theo trục y	[Chiều dài]
d_z	Chiều dài tương quan không gian theo trục z	[Chiều dài]
σ_f	Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi	Mpa
σ_g	Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng	kg/m^3
γ	Hệ số tương quan của các trường ngẫu nhiên	-
N_e	Số lượng phần tử	-
N	Số lượng hàm mô phỏng	-
E	Mô đun đàn hồi của vật liệu	Mpa
ρ	Mật độ khối lượng của vật liệu	kg/m^3
R_{ff}	Hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi	-
R_{gg}	Hàm tự tương quan trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng	-
R_{fg}	Hàm tương quan chéo các trường ngẫu nhiên	-
S_{ff}	Hàm mật độ phổ công suất của trường mô đun đàn hồi	-
S_{gg}	Hàm mật độ phổ công suất của trường mật độ khối lượng	-

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong phân tích và thiết kế kết cấu, các thông số đầu vào có tính ngẫu nhiên và không chắc chắn xuất hiện phổ biến như: tải trọng và các tác động, tính chất vật liệu, kích thước hình học của kết cấu, hoặc những yếu tố liên quan đến việc thiếu dữ liệu khi phân tích. Trong đó, tính ngẫu nhiên của tính chất vật liệu thường bắt nguồn từ nhiều nguyên nhân như: quá trình chế tạo vật liệu, điều kiện thi công, môi trường, hoặc sự lão hóa của vật liệu. Các yếu tố này làm cho các thông số đầu vào như mô đun đàn hồi (E), hệ số Poisson (ν), khối lượng riêng (mật độ khối lượng, ρ) trở thành những đại lượng không chắc chắn, biến đổi ngẫu nhiên trong không gian. Các giá trị trung bình của các đại lượng được đưa vào phân tích để thay thế cho các tham số ngẫu nhiên trong mô hình tất định có thể dẫn đến sự sai khác giữa kết quả mô phỏng và đáp ứng thực tế, làm giảm độ tin cậy và khả năng phản ánh đầy đủ bản chất vật lý của bài toán.

Trong bối cảnh đó, phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (Stochastic Finite Element Method – SFEM) đã và đang phát triển, được biết đến như một giải pháp hữu hiệu với mục đích mô phỏng và phân tích ảnh hưởng của các đại lượng không chắc chắn đến đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu. SFEM cho phép tích hợp trực tiếp các trường ngẫu nhiên không gian vào bài toán phân tích kết cấu, từ đó tính toán được các đại lượng thống kê của đáp ứng như kỳ vọng, phương sai, hệ số biến thiên (COV) nhằm phục vụ cho các bài toán thiết kế theo độ tin cậy. Đặc biệt, với những tiến bộ gần đây của kỹ thuật máy tính và các kỹ thuật biểu diễn trường ngẫu nhiên như tích phân trọng số, khai triển Karhunen–Loève, biểu diễn phổ, và đa thức nhiễu động, việc triển khai SFEM ngày càng trở nên sâu rộng và hiệu quả hơn trong thực tiễn phân tích kết cấu.

Dầm và cột là những kết cấu cơ bản, phổ biến được áp dụng rộng trong các công trình xây dựng. Tuy nhiên, phần lớn các công trình khoa học đã công bố hiện nay khi phân tích đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột mới chỉ dừng lại ở việc xét đến sự biến thiên ngẫu nhiên của tính chất vật liệu theo một chiều (thường là chiều dài của cấu kiện), hoặc kết hợp giữa chiều dài và quy luật biến thiên tất định theo chiều cao tiết diện. Rất ít công trình công bố xem xét đến tính bất định của cơ tính vật liệu ngẫu nhiên đồng thời theo hai phương trong không gian 2D (chiều dài, chiều cao), hoặc theo cả ba phương trong không gian 3D (chiều dài, chiều cao, chiều rộng), trong khi mô hình như vậy lại phản ánh gần với thực tế hơn về tính thay đổi ngẫu nhiên của tính chất vật liệu trong quá trình triển khai thi công, khai thác của kết cấu.

Do đó, phân tích ngẫu nhiên bằng cách phát triển SFEM cho dầm, cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian (2D, 3D) là cần thiết. Hướng nghiên cứu này không những lấp đầy khoảng trống về mặt lý thuyết, mà còn cung cấp thêm tri thức về khả năng mô phỏng và dự báo chính xác đáp ứng thực của kết cấu. Bên cạnh đó, đây cũng là xu hướng phù hợp với yêu cầu ngày càng cao về độ tin cậy và an toàn trong thiết kế công trình, đồng thời góp phần vào mục tiêu tối ưu hóa vật liệu và chi phí, nâng cao hiệu quả khai thác và bảo trì công trình theo hướng chủ động và bền vững.

Căn cứ trên những nguồn được tổng hợp, có thể khẳng định rằng đề tài **“Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích ứng xử cơ học của dầm, cột xét tới phân bố ngẫu nhiên tính chất vật liệu”** là cấp thiết, có giá trị thực tiễn và đóng góp đáng kể thêm tri thức vào lĩnh vực cơ học ngẫu nhiên trong kỹ thuật kết cấu hiện đại.

2. MỤC TIÊU NGHIÊN CỨU

Mục tiêu xuyên suốt của luận án là phát triển SFEM nhằm phân tích đáp ứng cơ học ngẫu nhiên của dầm và cột trong điều kiện tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian. SFEM được phát triển trên cơ sở rời rạc hóa trường ngẫu nhiên của tính chất vật liệu bằng kỹ thuật tích phân trọng số, qua đó chuyển đổi trường ngẫu nhiên liên tục thành một tập hữu hạn các biến ngẫu nhiên cơ bản. Thông qua kỹ thuật nhiễu loạn (perturbation method) các biến ngẫu nhiên này được đưa vào hệ thống phục vụ phân tích. Trên cơ sở khai triển Taylor bậc nhất của đáp ứng của dầm, cột xung quanh giá trị kỳ vọng toán học của các tham số ngẫu nhiên, phương pháp đề xuất cho phép thiết lập trực tiếp các đại lượng thống kê của ứng xử của dầm, cột, bao gồm: chuyển vị, trị riêng của bài toán dao động riêng, và tải trọng tới hạn của cột chịu nén đúng tâm.

Song song với SFEM được đề xuất nghiên cứu và phát triển, phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS) cũng được phát triển độc lập nhằm đánh giá và xác thực độ chính xác cũng như tính phù hợp của kết quả phân tích. MCS là phương pháp thống kê trong đó, trường ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu được mô phỏng bằng biểu diễn phổ (spectral representation method – SRM) để tạo ra các hàm mẫu (realizations), sau đó kết hợp FEM tiêu chuẩn trong từng lần mô phỏng. Các kết quả thu được xử lý bằng các công cụ thống kê mô tả nhằm xác định các đại lượng thống kê của đáp ứng của dầm, cột.

Ngoài ra, luận án còn tập trung phân tích định lượng ảnh hưởng của các tham số của trường ngẫu nhiên không gian, bao gồm: Hệ số biến thiên của tính chất vật liệu, chiều dài tương quan trong không gian và tương quan chéo giữa các trường ngẫu nhiên của tính chất vật liệu, đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Trong luận án này, đối tượng kết cấu được nghiên cứu là kết cấu dạng thanh phẳng, cụ thể là dầm và cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian, bao gồm: mật độ khối lượng – khối lượng riêng (ρ) và mô đun đàn hồi (E), được mô hình hóa bằng các trường ngẫu nhiên không gian, Gaussian, dừng và đơn biến. Các trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu được nghiên cứu trong luận án có mối tương quan chéo. Biến động ngẫu nhiên của tính chất vật liệu trong phạm vi ($COV \leq 20\%$). Mô hình SFEM được xây dựng cho mặt cắt ngang hình chữ nhật không thay đổi kích thước, trên cơ sở lý thuyết dầm Euler–Bernoulli. Các hiệu ứng thứ cấp dẫn đến sai khác giữa trọng tâm hình học và tâm uốn, tâm nén là không đáng kể. Vì vậy bài toán được nghiên cứu là bài toán uốn phẳng, bỏ qua ảnh hưởng bậc hai của mô men xoắn hoặc tương tác giữa uốn và xoắn.

Luận án nghiên cứu ảnh hưởng ngẫu nhiên của tính chất vật liệu đến ứng xử tổng thể của dầm, cột bao gồm: chuyển vị, trị riêng của tần số dao động riêng, tải trọng tới hạn. Ba bài toán cơ học cơ bản được nghiên cứu và phát triển trong khuôn khổ luận án bao gồm: (i) bài toán ứng xử tĩnh ngẫu nhiên, (ii) bài toán trị riêng trong phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính và (iii) bài toán ổn định tổng thể ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm. Phân tích chủ yếu tập trung thiết lập các đại lượng thống kê của đáp ứng của dầm, cột như kỳ vọng, phương sai và hệ số biến thiên (COV) đối với các đại lượng đáp ứng như chuyển vị, giá trị riêng của bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính và tải trọng tới hạn mất ổn định, nhằm định lượng và đánh giá ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên trong tính chất vật liệu đến ứng xử của dầm, cột trong điều kiện bất định. Trong luận án, sự thay đổi ngẫu nhiên vị trí của trục trung hòa do hiệu ứng thứ cấp của tính không đồng nhất của vật liệu được bỏ qua (trục trung hòa trùng với trục trung bình hình học), đồng thời tính ngẫu nhiên của tính chất vật liệu không làm thay đổi tính đối xứng về mặt ứng xử của tiết diện.

4. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ Ý NGHĨA THỰC TIỄN CỦA LUẬN ÁN

Luận án đóng góp thêm tri thức mới vào lĩnh vực cơ học ngẫu nhiên bằng cách phát triển SFEM để phân tích đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột khi tính chất vật liệu biến đổi ngẫu nhiên trong không gian hai chiều và ba chiều. Thông qua việc tích hợp các trường ngẫu nhiên không gian vào kết cấu dầm và cột, nghiên cứu đã mở rộng phạm vi ứng dụng của SFEM từ mô hình tính chất vật liệu ngẫu nhiên một chiều sang các mô hình trường ngẫu nhiên không gian đa chiều gần với thực tế hơn, đồng thời lượng hóa được ảnh hưởng của các đặc trưng ngẫu nhiên đến đáp ứng của dầm và cột. Kết quả thu được góp phần hoàn thiện lý thuyết phân tích kết cấu trong điều kiện bất định và làm phong phú thêm khung lý

thuyết về SFEM trong các bài toán phân tích tĩnh, phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm và ổn định cột là những cấu kiện cơ bản của ngành xây dựng.

Luận án đã phát triển cung cấp cơ sở để mô phỏng và dự báo đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột trong điều kiện thực tế có yếu tố bất định, từ đó hỗ trợ thiết kế kết cấu theo hướng củng cố tính bền vững của hệ thống. Việc mô hình hóa tính chất vật liệu bằng trường ngẫu nhiên không gian giúp phản ánh chính xác hơn sự không đồng nhất thực tế trong sản xuất và thi công, đặc biệt trong các công trình sử dụng vật liệu mới hoặc có yếu tố bất định. SFEM phát triển trong luận án có thể được ứng dụng trong thiết kế cầu, nhà cao tầng, công trình công nghiệp là các kết cấu yêu cầu độ an toàn, cũng như trong công tác giám sát và bảo trì công trình theo hướng chủ động.

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Để giải quyết các mục tiêu khoa học đặt ra, luận án sử dụng kết hợp các phương pháp giải tích, phương pháp số và mô phỏng thống kê, cụ thể bao gồm:

Phương pháp giải tích cơ học: Sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli để thiết lập các phương trình cân bằng vi phân tổng quát mô tả ứng xử tĩnh, đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm và ổn định của cột.

Kỹ thuật rời rạc hóa trường ngẫu nhiên: Phát triển kỹ thuật tích phân trọng số để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên không gian đa chiều (2D, 3D) liên tục của tính chất vật liệu thành tập hợp hữu hạn các biến ngẫu nhiên cơ bản. Kỹ thuật này giúp phân tách tường minh thành phần tất định và ngẫu nhiên trong các ma trận đặc trưng của hệ thống.

Phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) và nhiễu loạn: Phát triển mô hình SFEM kết hợp với phương pháp nhiễu loạn bậc nhất thông qua khai triển chuỗi Taylor. Hướng tiếp cận này cho phép xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê bậc thấp (kỳ vọng, phương sai, hệ số biến thiên) của đáp ứng cơ học mà không yêu cầu quá trình tính toán lặp.

Phương pháp mô phỏng thống kê và kiểm chứng: Sử dụng mô phỏng Monte Carlo (MCS) làm tiêu chuẩn đối sánh độc lập. Sự hội tụ và độ chính xác của SFEM được xác thực qua việc so sánh với MCS và kết quả của các nghiên cứu trước đây.

Phương pháp khảo sát tham số định lượng: Luận án tiến hành khảo sát định lượng nhằm phân tích ảnh hưởng của các đặc trưng trường ngẫu nhiên (chiều dài tương quan, hệ số biến thiên, tương quan chéo) đến sự phân tán đáp ứng cơ học ngẫu nhiên của dầm, cột, từ đó xác lập các quy luật cơ học ngẫu nhiên.

CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ PHÂN TÍCH NGẪU NHIÊN

KẾT CẤU

1.1. BIẾN NGẪU NHIÊN

Phép thử ngẫu nhiên là một thí nghiệm hoặc hành động được thực hiện trong cùng một điều kiện, nhưng kết quả không thể dự đoán chắc chắn trước khi thực hiện. Một không gian xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên X ký hiệu là (Ω, F, P) trong đó: Ω là không gian mẫu, F là một sigma-đại số, tức là tập các biến cố là các tập con của Ω thỏa mãn các tính chất toán học nhất định, P là hàm xác suất, ánh xạ mỗi sự kiện trong F tới một số thực trong đoạn $[0, 1]$. Biến ngẫu nhiên X là một hàm có tập xác định là không gian mẫu Ω .

Biến ngẫu nhiên có hai loại là biến ngẫu nhiên liên tục và biến ngẫu nhiên rời rạc. Đối với biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ và hàm phân phối tích lũy $F_X(x)$. Kỳ vọng toán, phương sai và mô-men bậc n được xác định lần lượt như (1.1), (1.2), (1.3). Hiệp phương sai của hai biến ngẫu nhiên X và Y được xác định như (1.4) với $f_{X,Y}(x,y)$ là hàm mật độ xác suất chung của hai biến ngẫu nhiên X và Y . μ_X, μ_Y là kỳ vọng toán của các biến ngẫu nhiên X và Y .

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1.1)$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \quad (1.2)$$

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx \quad (1.3)$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (1.4)$$

1.2. TRƯỜNG NGẪU NHIÊN

Thay vì trả về một giá trị vô hướng như biến ngẫu nhiên, mỗi hiện thực hóa (realization) của một hàm ngẫu nhiên là một hàm tất định, thường được gọi là quỹ đạo mẫu. Tập hợp các quỹ đạo mẫu này phản ánh toàn diện sự thăng giáng của hệ thống dưới ảnh hưởng của yếu tố ngẫu nhiên. Khái niệm hàm ngẫu nhiên được phân loại dựa trên bản chất của biến độc lập: nó được gọi là quá trình ngẫu nhiên (stochastic process) nếu biến độc lập là thời gian t , và được định danh là trường ngẫu nhiên (random field) khi biến này là tọa độ không gian $\mathbf{x}$. Cho một không gian xác suất (Ω, F, P) trong đó:

- Ω là không gian mẫu,

- F là σ -đại số các biến cố,
- P là hàm xác suất trên F .

Khi đó, một hàm ngẫu nhiên được định nghĩa là một ánh xạ hai biến $T(\mathbf{x}, \theta): D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, trong đó:

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là miền tham số (có thể biểu diễn thời gian, không gian, hoặc các biến độc lập khác),
- Với mỗi $\theta = \theta_i \in \Omega$ thì $T(\mathbf{x}, \theta_i)$ là một hiện thực hóa của trường ngẫu nhiên $T(\mathbf{x}, \theta)$ hay một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên.

Tương ứng với số chiều của chỉ mục $\mathbf{x}$ nghĩa là số lượng biến mà hàm ngẫu nhiên phụ thuộc thì có các trường ngẫu nhiên khác nhau: trường ngẫu nhiên 1D, trường ngẫu nhiên 2D và trường ngẫu nhiên 3D. Khi $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ thì $T(\mathbf{x}_i, \theta)$ là một biến ngẫu nhiên hoặc một véc tơ tập hợp của biến ngẫu nhiên. Trong trường hợp $T(\mathbf{x}_i, \theta)$ là một biến ngẫu nhiên $T(\mathbf{x}, \theta)$ gọi là trường ngẫu nhiên đơn biến. Còn trong trường hợp $T(\mathbf{x}_i, \theta)$ là một véc tơ ngẫu nhiên thì trường ngẫu nhiên $T(\mathbf{x}, \theta)$ là trường ngẫu nhiên đa biến. Xét một trường ngẫu nhiên một chiều $T(x, \theta)$ với $x \in \mathbb{R}$ tương ứng với các giá trị của trường ngẫu nhiên tại các vị trí khác nhau trong trường ngẫu nhiên khi đó ta có các biến ngẫu nhiên: $T(x_1, \theta), T(x_2, \theta), \dots, T(x_p, \theta)$.

Xét một trường ngẫu nhiên một chiều $T(x, \theta)$ với $x \in \mathbb{R}$, tương ứng có các biến ngẫu nhiên $T(x_1, \theta), T(x_2, \theta), \dots, T(x_p, \theta)$. Hàm phân phối xác suất tích lũy và hàm mật độ xác suất của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ được xác định theo (1.5) và (1.6).

$$F_{T(x_1, \theta), T(x_2, \theta), \dots, T(x_p, \theta)}(t_1, t_2, \dots, t_p) = P\left\{\theta \in \Omega : T(x_1, \theta) \leq t_1, T(x_2, \theta) \leq t_2, \dots, T(x_p, \theta) \leq t_p\right\} \quad (1.5)$$

$$f_{T(x_1, \theta), T(x_2, \theta), \dots, T(x_p, \theta)}(t_1, t_2, \dots, t_p) = \frac{\partial^p}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_p} F_{T(x_1, \theta), T(x_2, \theta), \dots, T(x_p, \theta)}(t_1, t_2, \dots, t_p) \quad (1.6)$$

Dựa trên hàm mật độ xác suất được ký hiệu là $f_{T(x, \theta)}$ của $T(x, \theta)$, mô-men gốc bậc q của trường ngẫu nhiên được xác định như (1.7), với $q = 1$ ta có mô-men gốc bậc nhất của trường ngẫu nhiên là hàm kỳ vọng như (1.8). Mô men trung tâm bậc q của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ được xác định như (1.9), với $q = 2$ ta có mô-men trung tâm bậc hai như phương trình (1.10).

$$m_q(x) = \mathbb{E}[T^q(x, \theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^q f_{T(x, \theta)} dt \quad (1.7)$$

$$\mu_T(x) = \mathbb{E}[T(x, \theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T(x, \theta)} dt \quad (1.8)$$

$$\mathbb{E}[(T(x, \theta) - \mu_T(x))^q] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu_T(x))^q f_{T(x, \theta)} dt \quad (1.9)$$

$$\mathbb{E}\left[\left(T(x, \theta) - \mu_T(x)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu_T(x))^2 f_{T(x, \theta)}(t) dt \quad (1.10)$$

Hàm tự tương quan $R_T(x_i, x_j)$ của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ xác định mối tương quan của các giá trị của trường ngẫu nhiên $T(x_i, \theta)$ và $T(x_j, \theta)$ với $x_i = x_1, x_2, \dots, x_p$ và $x_j = x_1, x_2, \dots, x_p$. Hàm tự tương quan $R_T(x_i, x_j)$ của trường ngẫu nhiên $T(x)$ được định nghĩa như (1.11).

$$R_T(x_i, x_j) = \mathbb{E}\left[T(x_i, \theta)T(x_j, \theta)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_i t_j f_{T(x_i)T(x_j)}(t_i, t_j) dt_i dt_j \quad (1.11)$$

Hàm tự hiệp phương sai $C_T(x_i, x_j)$ của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ được xác định như (1.12). Đối với trường ngẫu nhiên có hàm kỳ vọng bằng không thì hàm tự hiệp phương sai bằng hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên. Khi đó, xét tại hai giá trị của $x_i = x_j = x$ thì hàm phương sai được xác định thông qua hàm tự hiệp phương sai như (1.13).

$$C_T(x_i, x_j) = R_T(x_i, x_j) - \mu_T(x_i)\mu_T(x_j) \quad (1.12)$$

$$\text{Var}[T(x, \theta)] = C_T(x, x) = \mathbb{E}\left[\left(T(x, \theta) - \mu_T(x)\right)^2\right] \quad (1.13)$$

Chuẩn hóa hàm tự hiệp phương sai của trường ngẫu nhiên thu được hệ số tự tương quan như (1.14). Để đo sự phụ thuộc của hai trường ngẫu nhiên khác nhau $T_1(x)$ và $T_2(y)$ sử dụng hàm tương quan chéo $R_{T_1 T_2}(x, y)$ như (1.15). Tương tự với trường hợp một trường ngẫu nhiên, hàm tự hiệp phương sai của trường ngẫu nhiên được xác định như (1.16).

$$\rho_T(x_i, x_j) = \frac{C_T(x_i, x_j)}{\sqrt{C_T(x_i, x_i)}\sqrt{C_T(x_j, x_j)}} \quad (1.14)$$

$$R_{T_1 T_2}(x, y) = \mathbb{E}\left[T_1(x)T_2(y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_1 t_2 f_{T_1(x)T_2(y)}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.15)$$

$$C_{T_1 T_2}(x, y) = R_{T_1 T_2}(x, y) - \mu_{T_1}(x)\mu_{T_2}(y) \quad (1.16)$$

Trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian nếu bất kỳ véc tơ ngẫu nhiên $\{T(x_1, \theta), T(x_2, \theta), \dots, T(x_n, \theta)\}$ bao gồm các biến ngẫu nhiên Gaussian. Trường ngẫu nhiên Gaussian hoàn toàn xác định khi có được các đại lượng thống kê: hàm kỳ vọng $\mu_T(x)$, hàm phương sai $\sigma_T^2(x)$ và hàm tự tương quan $R_T(x_i, x_j)$. Trường ngẫu nhiên dừng là trường ngẫu nhiên có hàm kỳ vọng, hàm phương sai là hằng số và hàm tự tương quan chỉ phụ thuộc vào $\tilde{x} = x_j - x_i$. Giả thiết về tính Ergodic của trường ngẫu nhiên dừng: các đặc

trung thống kê mẫu tính trên miền không gian (như hàm trung bình mẫu, hàm phương sai mẫu) sẽ hội tụ về các tham số lý thuyết của quần thể (tương ứng là hàm kỳ vọng, hàm phương sai) khi kích thước miền khảo sát tiến tới vô cùng.

1.3. TỔNG QUAN CÁC PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN

SFEM đòi hỏi biểu diễn trường ngẫu nhiên của các yếu tố đầu vào ngẫu nhiên hoặc các tham số không chắc chắn dưới dạng tập hợp hữu hạn các biến ngẫu nhiên. Theo phân phối xác suất của trường ngẫu nhiên phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên có thể chia thành hai nhóm chính: nhóm thứ nhất các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian và nhóm thứ hai các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian [113]. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian đa dạng hơn các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian vì trường ngẫu nhiên Gaussian hoàn toàn có thể được xác định được khi có các đặc trưng thống kê như: hàm trung bình, hàm tự tương quan [112]. Trong thực tế kỹ thuật đôi khi sự thiếu các dữ liệu đo được thì các trường ngẫu nhiên thường cũng được giả sử là trường ngẫu nhiên Gaussian.

1.3.1. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian

Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Gaussian được chia thành ba nhóm chính [80], [115]. Nhóm thứ nhất trường ngẫu nhiên được biểu diễn thành các biến ngẫu nhiên thông qua một vài điểm thuộc phần tử. Nhóm thứ hai trường ngẫu nhiên được biểu diễn thông qua tích phân trên miền không gian của phần tử. Nhóm thứ ba là nhóm phương pháp mở rộng chuỗi, trường ngẫu nhiên được biểu diễn thành chuỗi hữu hạn của các hàm tất định và các biến ngẫu nhiên. Các phương pháp kể trên cho phép chuyển đổi bài toán với đầu vào là trường ngẫu nhiên vô hạn chiều thành bài toán hữu hạn chiều với tập hợp các biến ngẫu nhiên.

1.3.1.1. Nhóm các phương pháp biểu diễn điểm

Trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ được rời rạc thành các biến ngẫu nhiên tại một hay vài điểm x_i thuộc phần tử. Độ lớn của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ tại vị trí $x = x_i$ được xác định như (1.17). Phương sai, giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên được xác định thông qua giá trị của trường ngẫu nhiên tại vị trí $x = x_i$. Sự tương quan giữa hai điểm có thể tính gần đúng thông qua hàm tự tương quan như (1.18).

$$T(x, \theta) \approx \tilde{T}(x, \theta) = T(x_i, \theta); \quad x_i \in V_e \quad (1.17)$$

$$R_{x_i, x_j} = R_T(x_i, x_j) \quad (1.18)$$

Nhóm phương pháp này có ưu điểm ma trận hiệp phương sai là hoàn toàn xác định và đương có thể tính toán đơn giản. Các biến ngẫu nhiên này được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên sẽ có cùng hàm phân phối xác suất với trường ngẫu nhiên. Nhược điểm chính của nhóm phương pháp này khi kết hợp với FEM đòi hỏi kích thước của phần tử phải đủ nhỏ để các tính chất của trường ngẫu nhiên không thay đổi trong một phần tử. Dẫn đến trong một số trường hợp khi chia lưới phần tử lớn đòi hỏi khối lượng và thời gian tính toán lớn.

1.3.1.2. Nhóm các phương pháp biểu diễn trung bình

a. Phương pháp trung bình trên miền phần tử

Phương pháp trung bình trên miền phần tử: Trường ngẫu nhiên được biểu diễn thành một biến ngẫu nhiên bằng cách xấp xỉ trường ngẫu nhiên trên miền phần tử V_e . Như vậy dựa vào lưới phần tử, trường ngẫu nhiên được giả định là không thay đổi trên toàn miền phần tử. Trường ngẫu nhiên được xấp xỉ thành một biến ngẫu nhiên theo (1.19). Phương pháp này được đề xuất bởi nhóm tác giả Vanmarcke và Grigoriu [121].

$$T(x, \theta) = \tilde{T}(x, \theta) = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} T(x, \theta) dV_e = X_e; \quad x \in V_e \quad (1.19)$$

Trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ được biểu diễn thành tập hợp hữu hạn các biến ngẫu nhiên X_e . Nếu lưới phần tử được chia thành N_e phần tử khi đó tập hợp các biến ngẫu nhiên sẽ bao gồm N_e . Các biến này tập hợp thành một véc tơ ngẫu nhiên $\{X_1, X_2, \dots, X_{N_e}\}$. Giá trị trung bình và ma trận hiệp phương sai được xác định thông qua hàm trung bình và hàm hiệp phương sai của trường ngẫu nhiên bằng cách lấy tích phân của các hàm này trên miền phần tử V_e .

Sử dụng kỹ thuật trung bình theo miền phần tử Vanmarcke [121] đã phân tích trường ngẫu nhiên hai chiều cho phần tử tám hình chữ nhật. Các nghiên cứu cũng chỉ ra rằng giá trị phương sai trên một phần tử áp dụng kỹ thuật trung bình trên miền phần tử nhỏ hơn giá trị phương sai của trường ngẫu nhiên. Tuy nhiên phương pháp trung bình trên miền phần tử tồn tại những hạn chế được chỉ ra bởi Matthies và các cộng sự [80]. Áp dụng phương pháp trung bình trên miền phần tử không phải hình chữ nhật có thể dẫn đến giá trị âm của ma trận hiệp phương sai. Hàm mật độ xác suất của các biến ngẫu nhiên X_e chỉ có thể được xác định trong trường hợp trường ngẫu nhiên Gaussian [72].

b. Kỹ thuật tích phân trọng số

Phương pháp tích phân trọng số được nghiên cứu và phát triển trong bài toán ứng xử đàn hồi tuyến tính. Trong đó ma trận độ cứng là hàm của các biến ngẫu nhiên. Các biến

ngẫu nhiên được xác định dựa trên tích phân của các đơn thức và trường ngẫu nhiên trên miền lấy tích phân V_e . Phương pháp này được đề xuất bởi Deodatis và các cộng sự [32], [34], [35], [36] và cũng được phát triển bởi Takada [119], [120]. Trong phân tích tuyến tính ma trận độ cứng của phần tử được xác định như (1.20) với $[B]$ là ma trận tính biến dạng và ma trận đàn hồi $[D]$.

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (1.20)$$

Xem xét trường hợp ma trận hệ số đàn hồi thu được dưới dạng tích số ma trận các hệ số đàn hồi trung bình $[D_0]$ và một trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ một chiều có kỳ vọng bằng không được xác định như (1.21).

$$[D] = [D_0] [1 + T(x, \theta)] \quad (1.21)$$

Thay (1.21) vào (1.20), $[K]_e$ có thể được viết dưới dạng (1.22).

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D_0] [B] dV_e + \int_{V_e} T(x, \theta) [B]^T [D_0] [B] dV_e \quad (1.22)$$

Ma trận tính biến dạng $[B]$ được xác định bằng cách lấy đạo hàm của các hàm dạng của phần tử như (1.23) vì vậy $[B]^T [D_0] [B]$ được xác định là các đa thức của các biến x, y, z . Vì vậy (1.22) có thể được viết lại dưới dạng (1.24) với các đại lượng như (1.25) và (1.26). N_w là số lượng biến ngẫu nhiên được biểu diễn thông qua một phần tử, trong khi m, n, t là chỉ số mũ của các đơn thức x, y, z .

$$[B] = [\nabla] [N] \quad (1.23)$$

$$[K]_e = [K_0]_e + \sum_{i=1}^{N_w} [\Delta K_i] X_i \quad (1.24)$$

$$[K_0]_e = \int_{V_e} [B]^T [D_0] [B] dV_e \quad (1.25)$$

$$X_i = \int_{V_e} x^n y^m z^t T(x, \theta) dV_e \quad (1.26)$$

Phương pháp tích phân trọng số phụ thuộc vào lưới chia phần tử thông qua ma trận $[B]$. Trong bối cảnh SFEM, Deodatis và các cộng sự [33], [34] nghiên cứu phần tử thanh cho kết cấu dầm, khung, dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên thay đổi một chiều dọc theo chiều dài thanh. Tsuyoshi Takada [119] đề xuất phương pháp tích phân trọng số cho trường ngẫu nhiên không gian đa chiều, phân tích kết cấu tấm có dạng hình chữ nhật có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên theo hai phương. T.D. Hien [116] sử dụng phương pháp tích phân trọng số phân tích tĩnh bài toán cột có mặt cắt thay đổi tuyến tính. Noh và cộng sự [87] phát triển

SFEM kết hợp phương pháp nhiễu động để phân tích tấm composite có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên. Trường ngẫu nhiên được biểu diễn thông qua tích phân trọng số.

1.3.1.3. Nhóm các phương pháp mở rộng chuỗi biểu diễn trường ngẫu nhiên

Nhóm phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên dưới dạng mở rộng chuỗi thường được kết hợp với SFEM theo hướng tiếp cận phổ (SSFEM) được đề xuất bởi Ghanem và Spanos [49]. Trường ngẫu nhiên được biểu diễn dưới dạng chuỗi hữu hạn của các hàm tất định và các biến ngẫu nhiên.

a. Phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen–Loève ($K - L$)

Phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen–Loève của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ dựa trên sự phân tích phổ của hàm tự hiệp phương sai. Hàm tự hiệp phương sai là hàm bị chặn, đối xứng và xác định dương, hàm tự hiệp phương sai như (1.27)

$$C_T(x_i, x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x_i) \varphi_n(x_j) \quad (1.27)$$

Trong đó:

- + φ_n : Hàm riêng xác định và trực giao của hàm tự hiệp phương sai;
- + λ_n : Giá trị riêng của hàm tự hiệp phương sai.

Giá trị riêng λ_n và hàm riêng φ_n của hàm tự hiệp phương sai được xác định từ tích phân Fredholm với mọi $n = 1, 2, \dots, \infty$ với miền lấy tích phân D là miền xác định của trường ngẫu nhiên như (1.28).

$$\int_D C_T(x_i, x_j) \varphi_n(x_i) dx_i = \lambda_n \varphi_n(x_j) \quad (1.28)$$

Trong miền xác định D các hàm riêng φ_n là các hàm trực giao do đó các hàm riêng thỏa mãn phương trình (1.29) với δ_{ij} là một hàm Kronecker-delta. Các giá trị riêng λ_n là tập hợp các số thực dương. Với mọi thể hiện của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ có thể được phân tích như (1.28) nên trường ngẫu nhiên có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi [52].

$$\int_D \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (1.29)$$

$$T(x, \theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) \varphi_n(x) \quad (1.30)$$

Với các đại lượng:

- + $\mu_T(x)$: Hàm kỳ vọng của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$,

+ $\xi_n(\theta)$: Tập hợp hữu hạn các biến ngẫu nhiên trực giao và không tương quan được xác định như (1.31).

$$\xi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_D T(x, \theta) \varphi_n(x) dx \quad (1.31)$$

Tập hợp hữu hạn các biến $\xi_n(\theta)$ có kỳ vọng toán học và phương sai như (1.32), (1.33).

$$\mathbb{E}[\xi_n(\theta)] = 0 \quad (1.32)$$

$$\text{Var}[\xi_i(\theta), \xi_j(\theta)] = \delta_{ij} \quad (1.33)$$

Đối với trường ngẫu nhiên Gaussian thì $\xi_n(\theta)$ là các biến ngẫu nhiên Gaussian trực chuẩn độc lập. Trong thực tế phân tích trường ngẫu nhiên được lấy với N hữu hạn của chuỗi. Do đó trường ngẫu nhiên xấp xỉ như (1.34) và hàm tự hiệp phương sai của trường ngẫu nhiên xấp xỉ như (1.35). Ghanem và Spanos [52] đã chứng minh được rằng trường ngẫu nhiên xấp xỉ theo (1.34) là tối ưu theo nghĩa bình phương tối thiểu vì các giá trị riêng dần hội tụ về không.

$$T(x, \theta) \approx \tilde{T}(x, \theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) \varphi_n(x) \quad (1.34)$$

$$C_T(x_i, x_j) \approx \tilde{C}_T(x_i, x_j) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n(x_i) \varphi_n(x_j) \quad (1.35)$$

Phương sai của sai số trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ và trường ngẫu nhiên xấp xỉ $\tilde{T}(x, \theta)$ được xác định như (1.36). Dễ dàng thấy rằng phương sai của trường ngẫu nhiên xấp xỉ khi triển khai theo chuỗi $K - L$ luôn nhỏ hơn phương sai của trường ngẫu nhiên thực.

$$\text{Var}[T(x, \theta) - \tilde{T}(x, \theta)] = \sigma_T^2(x) - \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi^2(x) \quad (1.36)$$

b. Phương pháp mở rộng chuỗi trực giao

Phương pháp mở rộng chuỗi trực giao được giới thiệu bởi Zhang và Ellingwood [135], tương tự với ý tưởng được đưa ra bởi Li và Der Kiureghian [77]. Biểu diễn trường ngẫu nhiên được biểu diễn bằng phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen–Loève phải tìm các trị riêng và hàm riêng bằng tích phân Fredholm như (1.28). Điều này gặp khó khăn trong một số trường hợp. Vì vậy phương pháp mở rộng chuỗi trực giao được phát triển từ phương pháp ước lượng tuyến tính tối ưu [107]. Để tránh phải giải bài toán trị riêng để xác định các hàm riêng phương pháp này lựa chọn một tập hợp các hàm riêng trực giao. Giả sử tập hợp các hàm trực giao $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\dots,\infty}$, các hàm này tạo thành cơ sở của không gian

xác suất của trường ngẫu nhiên. Trường ngẫu nhiên có hàm trung bình $\mu_T(x)$ và hàm tự hiệp phương sai $C_T(x_i, x_j) = \sigma_T(x_i, x_i)\sigma_T(x_j, x_j)\rho_T(x_i, x_j)$. Một thể hiện bất kỳ của trường ngẫu nhiên là một hàm xác định trong không gian xác suất và được biểu diễn thông qua các hàm trực giao $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\dots,\infty}$ với $\chi_n(\theta)$ là tập hợp các biến ngẫu nhiên này có kỳ vọng toán bằng không. Dựa vào đặc điểm trực giao của các hàm xác định $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\dots,\infty}$ các biến ngẫu nhiên có các tính chất như (1.38) và (1.39).

$$T(x, \theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(\theta) g_n(x) \quad (1.37)$$

$$\chi_n(\theta) = \int_V [T(x, \theta) - \mu_T(x)] g_n(x) dx \quad (1.38)$$

$$\mathbb{E}[\chi_n(\theta) \chi_m(\theta)] = \int_V \int_V C_T(x_i, x_j) g_n(x_i) g_m(x_j) dx_i dx_j \quad (1.39)$$

Trong trường hợp $T(x, \theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian thì các biến ngẫu nhiên $\chi_n(\theta)$ cũng là các biến ngẫu nhiên Gaussian có kỳ vọng bằng không và các biến ngẫu nhiên này có thể tương quan lẫn nhau. Chọn N số hạng của chuỗi để tính gần đúng trường ngẫu nhiên như (1.40) với đầy đủ hàm $\{g_n(x)\}_{n=1,2,\dots,\infty}$.

$$T(x, \theta) \approx \tilde{T}(x, \theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^N \chi_n(\theta) g_n(x) \quad (1.40)$$

Các biến ngẫu nhiên Gaussian $\{\chi_n(\theta)\} = \{\chi_1(\theta), \chi_2(\theta), \dots, \chi_N(\theta)\}$ của trường ngẫu nhiên Gaussian khi áp dụng phương pháp mở rộng chuỗi trực giao các biến ngẫu nhiên có thể tương quan lẫn nhau. Vì vậy có thể biểu diễn véc tơ này thông qua véc tơ các biến ngẫu nhiên chuẩn trực giao và không tương quan $\{\xi_n(\theta)\}$ qua phép phân tích phổ của ma trận hiệp phương sai như (1.41).

$$\sum_{xx} [\Phi] = [\Phi][\Gamma] \quad (1.41)$$

Trong đó:

- + $\sum_{xx}$: Là ma trận tự hiệp phương sai;
- + $[\Phi]$: Ma trận có các cột là véc tơ riêng của ma trận hiệp phương sai ;
- + $[\Gamma]$: Là ma trận đường chéo chính là các trị riêng λ_i của ma trận $\sum_{xx}$.

Quan hệ giữa véc tơ biến ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\}$ và véc tơ các biến ngẫu nhiên trực chuẩn $\{\xi_n(\theta)\}$ như (1.42). Khi đó biến $\chi_n(\theta)$ được xác định như (1.43) với Φ_n^i là véc tơ riêng thứ i tương ứng với giá trị riêng λ_i .

$$\{\chi_n(\theta)\} = [\Phi][\Gamma]^{\frac{1}{2}} \{\xi_n(\theta)\} \quad (1.42)$$

$$\chi_n(\theta) = \sum_{i=1}^N \Phi_n^i \sqrt{\lambda_i} \xi_n(\theta) \quad (1.43)$$

Thay (1.43) vào (1.40) trường ngẫu nhiên Gaussian $T(x, \theta)$ được biểu diễn bằng phương pháp chuỗi trực giao như (1.44).

$$T(x, \theta) \approx \tilde{T}(x, \theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^N g_n(x) \left(\sum_{i=1}^N \Phi_n^i \sqrt{\lambda_i} \xi_n(\theta) \right) \quad (1.44)$$

c. Phương pháp ước lượng tuyến tính tối ưu mở rộng

Phương pháp ước lượng tuyến tính tối ưu mở rộng được đề xuất bởi Li và Der Kiureghian [77]. Tập hợp các biến ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\} = \{T(x_1, \theta), T(x_2, \theta), \dots, T(x_N, \theta)\}$ là giá trị của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ tại vị trí nút của lưới xấp xỉ. Nếu $T(x, \theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian thì véc tơ ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\}$ bao gồm các biến ngẫu nhiên Gaussian. Véc tơ bao gồm các biến ngẫu nhiên $\{\chi_n(\theta)\}$ được biểu diễn bằng phân rã phổ cho ma trận tự hiệp phương sai như (1.45) của các biến ngẫu nhiên.

$$\{\chi_n(\theta)\} = \mu_\chi + \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) \Phi_n \quad (1.45)$$

Trong đó:

- + λ_n : Giá trị riêng thứ n của ma trận hiệp phương sai;
- + Φ_n : Véc tơ riêng thứ n của ma trận hiệp phương sai;
- + μ_χ : Giá trị trung bình của các biến ngẫu nhiên;
- + $\{\xi_n(\theta)\}$: Véc tơ bao gồm các biến ngẫu nhiên chuẩn tắc độc lập.

Trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ được biểu diễn như (1.46).

$$T(x, \theta) \approx \tilde{T}(x, \theta) = \mu_T(x) + \sum_{n=1}^N \frac{\xi_n(\theta)}{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n^T \sum_{T(x, \theta) \{ \chi_n(\theta) \}} \quad (1.46)$$

- + $\sum_{T(x, \theta) \{ \chi_n(\theta) \}}$: Véc tơ hiệp phương sai giữa điểm x và các điểm nút.

d. Phương pháp tiếp cận phổ để biểu diễn trường ngẫu nhiên

Phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên bằng phổ được đề xuất bởi Shinozuka và Deodatis [107]. Trường ngẫu nhiên được mở rộng thành chuỗi lượng giác với các biến ngẫu nhiên là góc pha ban đầu. Xét trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ dừng, đơn biến có kỳ vọng bằng không, hàm tự tương quan $R_{TT}(\xi)$ và $S_{TT}(\omega)$ là ký hiệu của hàm mật độ phổ công suất của trường ngẫu nhiên được xác định bằng phép biến đổi Fourier.

$$\mathbb{E}[T(x, \theta)] = 0 \quad (1.47)$$

$$\mathbb{E}[T(x, \theta)T(x + \xi, \theta)] = R_{TT}(\xi) \quad (1.48)$$

$$S_{TT}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{TT}(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \quad (1.49)$$

$$R_{TT}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{TT}(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega \quad (1.50)$$

Trường ngẫu nhiên một chiều, dừng, đơn biến được biểu diễn là tổng chuỗi hữu hạn của chuỗi cosine như (1.51):

$$T(x, \theta) = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N-1} A_i \cos[\omega_i x + \phi_i(\theta)] \quad (1.51)$$

Trong đó:

$$A_i = \sqrt{2S_T(i\Delta\omega)\Delta\omega}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.52)$$

$$\omega_i = i\Delta\omega, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.53)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_u}{N} \quad (1.54)$$

$$A_0 = 0 \quad \text{hay} \quad S_T(\omega_0) = 0 \quad (1.55)$$

Trong (1.54) ω_u là tần số sóng cắt khi tần số lớn hơn tần số sóng cắt thì phổ công suất gần như bằng không. Để xác định tần số sóng cắt ω_u sử dụng phương trình (1.56) với sai số tương đối chấp nhận được $\varepsilon \ll 1$.

$$\int_0^{\omega_u} S_T(\omega) d\omega = (1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} S_T(\omega) d\omega \quad (1.56)$$

Hàm tự tương quan $R_{\tilde{T}\tilde{T}}(x_i, x_j)$ của trường ngẫu nhiên xấp xỉ $\tilde{T}(x, \theta)$ được xác định như (1.57).

$$R_{\tilde{T}\tilde{T}}(x_i, x_j) = \int_{-\omega_u}^{\omega_u} S_{TT}(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega = 2 \int_0^{\omega_u} S_{TT}(\omega) \cos(\omega\xi) d\omega \quad (1.57)$$

Trong (1.51), $\varphi_i(\theta)$ là các góc pha là các biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân bố đều trong $[0; 2\pi]$. Xem xét trường ngẫu nhiên dừng, đơn biến có kỳ vọng bằng không. $R_{TT}(\xi)$ và $S_{TT}(\omega)$ của trường ngẫu nhiên như sau:

$$R_{TT}(\xi) = \sigma^2 \exp \left[-\frac{|\xi_x|}{d_x} \right] \quad (1.58)$$

$$S_{TT}(\omega) = 2\sigma^2 \frac{d_x}{1 + (\omega d_x)^2} \quad (1.59)$$

Trong đó:

- + σ : Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên;
- + d_x : Chiều dài tương quan theo trục x ;
- + $\xi_x = |x_2 - x_1|$: Khoảng cách giữa hai vị trí xét tương quan;
- + ω : Tần số sóng không gian.

1.3.2. Các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian

1.3.2.1. Các phương pháp biến đổi tương quan

a. Phương pháp biến đổi tương quan

Xem xét trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, có kỳ vọng toán bằng không và phương sai bằng 1. Hàm mật độ phổ năng lượng của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ là $S_{TT}(\omega)$. Một trường ngẫu nhiên $H(x, \theta)$, dừng, Non-Gaussian với hàm mật độ phổ năng lượng $S_{HH}(\omega)$ có thể được định nghĩa:

$$H(x, \theta) = Y^{-1} \{ \Phi(T(x, \theta)) \} \quad (1.60)$$

Trong đó:

- + Φ : Hàm phân phối xác suất tích lũy Gaussian chuẩn tắc;
- + Y : Hàm phân phối xác suất tích lũy biên của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian.

Như vậy phép biến đổi $Y^{-1}\Phi$ cho phép tính toán giá trị của trường $H(x, \theta)$ chỉ phụ thuộc vào giá trị độ lớn của trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ ở cùng giá trị độ lớn của x . Các nghiên cứu khác dựa trên phương trình (1.60) để biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian gọi là phép tịnh tiến trường ngẫu nhiên. Điểm quan trọng của kỹ thuật này là phải lựa chọn được hàm phân bố xác suất cận biên của trường $H(x, \theta)$. Trường Non-Gaussian

và hàm mật độ phổ công suất của nó $S_{HH}(\omega)$ phải thỏa mãn điều kiện tương quan như (1.61).

$$R_{HH}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Y^{-1} \{ \Phi^{-1}(T_1) \} Y^{-1} \{ \Phi^{-1}(T_2) \} \phi[T_1, T_2; R_{TT}(\tau)] dT_1 dT_2 \quad (1.61)$$

Trong đó:

$$+ T_1 = T(x, \theta), T_2 = T(x + \tau, \theta);$$

$$+ \phi[T_1, T_2; R_{TT}(\tau)]: \text{Hàm mật độ xác suất Gauss hai biến}$$

b. Phương pháp mở rộng trường ngẫu nhiên biến đổi

Một trường ngẫu nhiên mở rộng Non-Gaussian ánh xạ đến các thể hiện của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian $H(x, \theta)$ với hàm phân phối xác suất cận biên của trường ngẫu nhiên Y và hàm $S_{HH}(\omega)$. Yamazaki và Shinozuka [129] đã đề xuất một quy trình tính lặp $S_{HH}(\omega)$. Các thể hiện của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian được tạo ra dựa vào hàm mật độ phổ công suất cuối cùng sau khi được tính lặp và phép biến đổi trường ngẫu nhiên như (1.62).

$$S_{HH}^{(i+1)}(\omega) = \frac{S_{HH}^{(i)}(\omega)}{S_{TT}^{(i)}(\omega)} S_{TT}(\omega) \quad (1.62)$$

Deodatis và Micaletti [33] đã chỉ ra rằng đối với các trường ngẫu nhiên Non-Gaussian có độ lệch lớn hàm mẫu thu được có hàm phân phối xác suất tích lũy giống với trường ngẫu nhiên mục tiêu nhưng hàm mật độ xác suất lại có sự khác biệt. Nguyên nhân được Deodatis và Micaletti đưa ra là sau lần lặp đầu tiên trường ngẫu nhiên $T(x, \theta)$ không còn là trường ngẫu nhiên Gaussian. Phoon và các cộng sự [96] đã áp dụng kỹ thuật mở rộng chuỗi Karhunen–Loève để biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian cùng với kỹ thuật ánh xạ lặp phù hợp với hàm phân phối cận biên mục tiêu. Phương pháp cung cấp một kỹ thuật mô phỏng các trường ngẫu nhiên dừng và không dừng và cải tiến trong trường hợp biểu diễn các trường ngẫu nhiên có độ lệch lớn. Một thuật toán mạnh được đề xuất [101] để biểu diễn trường ngẫu nhiên Non-Gaussian. Một kỹ thuật tính lặp được đề xuất để tạo ra các hàm mẫu của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian phù hợp với hàm mật độ xác suất cận biên và hàm mật độ phổ công suất.

1.3.2.2. Các phương pháp dựa trên triển khai đa thức nhiễu động

Sakamoto và Ghanem [101] đã phát triển một giải pháp tạo ra các hàm mẫu của trường ngẫu nhiên Non-Gaussian không dừng với hàm mật độ xác suất cận biên và hàm tự

tương quan mục tiêu bằng cách mở rộng trường ngẫu nhiên Non-Gaussian tại các điểm rời rạc bằng đa thức nhiều động.

$$u(\chi) = \sum_{i=1}^Q u_i(\chi) \Psi_i \quad (1.63)$$

Trong đó $\{\Psi_i\}_{i=1}^Q = P_j(\{\xi_n\}_{n=1}^N)$ là tập hợp hữu hạn các đa thức Hermite là hàm của tập hợp các biến ngẫu nhiên chuẩn Gaussian độc lập. Q là bậc của đa thức nhiều động và N là số lượng hữu hạn của chuỗi xấp xỉ trường ngẫu nhiên theo phương pháp mở rộng chuỗi Karhunen–Loève. Puig và các cộng sự [97], [98] đã kiểm tra sự hội tụ của chuỗi nhiễu loạn và đề xuất một kỹ thuật hiệu quả để thiết lập hàm tự tương quan Gaussian cơ bản. Trong một số trường hợp việ xấp xỉ chuỗi nhiễu loạn đòi hỏi phải tính toán một số lượng lớn các hệ số u_i [42], [55]. Xiu và Karniadakis [128] đã trình bày một giải pháp mới để tìm nghiệm phương trình vi phân ngẫu nhiên dựa trên phép chiếu Galerkin và phân mở rộng của đa thức nhiễu loạn Wiener. Các trường ngẫu nhiên hoặc quá trình ngẫu nhiên được biểu diễn bằng cách sử dụng một giá trị tối ưu cơ sở thử nghiệm từ họ đa thức trực giao Askey làm giảm chiều của hệ thống và dẫn đến sự hội tụ của sai số theo cấp số nhân.

1.4. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN

Trong những năm gần đây bài toán ngẫu nhiên thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học. Mỗi quan tâm chủ yếu tập trung phát triển các phương pháp số để phân tích hệ thống được mô tả bởi hệ phương trình chứa đạo hàm và vi phân có các hệ số ngẫu nhiên. Yếu tố ngẫu nhiên được trong hệ phương trình chứa đạo hàm và vi phân này là do các yếu tố ngẫu nhiên của hệ thống hoặc các tham số không chắc chắn khi đưa vào phân tích. SFEM kết hợp với sự phát triển kỹ thuật máy tính hiện đại là công cụ hiệu quả để giải quyết bài toán ngẫu nhiên [20]. Bên cạnh nhóm phương pháp số phương pháp giải tích cũng được dùng để phân tích ứng xử ngẫu nhiên của kết cấu. Do những khó khăn phức tạp của bài toán ngẫu nhiên và những hạn chế cố hữu về mặt biến đổi toán học nên phương pháp giải tích áp dụng được cho các bài toán đơn giản [24], [71], [106]. Ba dạng SFEM phổ biến và được chấp nhận để phân tích ngẫu nhiên của kết cấu bao gồm: kỹ thuật mô phỏng MCS, phương pháp nhiễu loạn và phương pháp SFEM tiếp cận phổ [20].

1.4.1. Phương pháp mô phỏng Monte Carlo

Phương pháp MCS dựa trên việc tạo ra một tập hợp các hiện thực hóa của các trường ngẫu nhiên của các biến đầu vào. Thực hiện phân tích đáp ứng của kết cấu trên tập mẫu đó thu được tập hợp các đáp ứng của kết cấu. Thực hiện xử lý số thống kê trên tập hợp các đáp ứng của kết cấu thu được các đặc trưng thống kê đáp ứng của kết cấu. Trong lĩnh vực

cơ học ngẫu nhiên MCS được áp dụng lần đầu tiên bởi Shinozuka và Jan [108] để mô phỏng số trường ngẫu nhiên dừng. Phương pháp MCS tỏ ra là một công cụ mạnh mẽ nhưng khi bài toán phức tạp với số chiều tăng lên thì dẫn đến khối lượng tính toán lớn. Thời gian tính toán và chi phí tính toán vì vậy cũng tăng. Phương pháp này kết hợp kỹ thuật MCS và FEM tiêu chuẩn. Trong thực hành, phương pháp MCS bao gồm các bước chính như sau [59]: (1) Xác định tập hợp các biến ngẫu nhiên; (2) Xác định các đặc trưng thống kê của các biến ngẫu nhiên đầu vào như hàm mật độ xác suất, hàm tương quan; (3) Sử dụng các kỹ thuật biểu diễn trường ngẫu nhiên để tạo ra tập hợp các hàm mẫu; (4) Dùng FEM tiêu chuẩn xác định để phân tích đáp ứng của kết cấu với mỗi thể hiện của trường ngẫu nhiên; (5) Phân tích thống kê xử lý số liệu thu được; (6) Đánh giá độ chính xác của quy trình. Theo FEM thiết lập công thức ma trận độ cứng phần tử như (1.64).

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (1.64)$$

Giả sử mô đun đàn hồi được mô tả toán học dưới dạng trường ngẫu nhiên có các hiện thực hóa của trường ngẫu nhiên là $\{T(x, E_i)\}_{i=1}^N$ với N là số thể hiện của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi được tạo ra để thực hiện MCS. Ma trận đàn hồi $[D]$ chịu ảnh hưởng của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên nên ma trận $[D]$ có thể được viết lại dưới dạng (1.65) với $[D_0]$ là ma trận tất định:

$$[D] = [D_0] T(x, E_i) \quad (1.65)$$

Thay (1.65) vào (1.64) thu được phương trình (1.66):

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e = \int_{V_e} T(x, E_i) [B]^T [D_0] [B] dV_e \quad (1.66)$$

Ma trận độ cứng tổng thể của toàn bộ kết cấu $[K]$ được xác định từ $[K]_e$ như (1.67) với N_e là tổng số lượng các phần tử của kết cấu. Ký hiệu Ext là mở rộng ma trận độ cứng.

$$[K(E_i)] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext} \quad (1.67)$$

Phương trình cơ bản được thiết lập theo FEM như (1.68) với $\{U\}$ là véc tơ chuyển vị nút, $\{P\}$ là véc tơ tải trọng nút của kết cấu.

$$[K(E_i)] \{U(E_i)\} = \{P\} \quad (1.68)$$

Xử lý điều kiện biên phương trình (1.68) sau đó giải hệ phương trình thu được véc tơ chuyển vị nút $\{U(E_i)\}$. Thực hiện tính lặp trên không gian mẫu của trường ngẫu nhiên được tạo ra thu được tập hợp các véc tơ nghiệm chuyển vị toàn cục. Xử lý thống kê [115] trên tập hợp số liệu thu được các đặc trưng thống kê của mẫu như: giá trị trung bình mẫu như phương trình (1.69) và giá trị phương sai mẫu (1.70) của chuyển vị nút thứ j .

$$\bar{U}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_j(E_i) \quad (1.69)$$

$$s_{U_j}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [U_j(E_i) - \bar{U}_j]^2 \quad (1.70)$$

Trong trường hợp để so sánh mức độ biến thiên tương đối của những tập dữ liệu khác nhau, đặc trưng thống kê được sử dụng trong trường hợp này là hệ số biến thiên (COV) được xác định như (1.71) bằng tỷ số giữa độ lệch chuẩn mẫu và giá trị trung bình mẫu.

$$\text{COV} = \frac{\sqrt{s_{U_j}^2}}{|\bar{U}_j|} \quad (1.71)$$

1.4.2. Phương pháp nhiễu loạn

Kỹ thuật nhiễu loạn áp dụng khai triển chuỗi Taylor của các đại lượng trong phương trình cân bằng của kết cấu xung quanh giá trị kỳ vọng của chúng. Xác định các hệ số của các đại lượng sau khi được triển khai chuỗi Taylor bằng cách áp dụng phân tích nhiễu loạn. Đây là phương pháp được áp dụng phổ biến để phân tích đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu khi có đầu vào ngẫu nhiên hoặc các tham số không chắc chắn [19], [41]. Kết cấu có các thông số ngẫu nhiên đầu vào hoặc tham số không chắc chắn được biểu diễn dưới dạng trường ngẫu nhiên. Áp dụng các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên đã trình bày trong mục 1.3 trường ngẫu nhiên được rời rạc thành tập hợp các biến ngẫu nhiên được biểu diễn như (1.72) có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$\{r\} = \{r_i\}_{i=1}^N = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \quad (1.72)$$

Trong khuôn khổ của FEM phương trình cân bằng tổng thể của kết cấu như (1.73).

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (1.73)$$

Giả định các tham số để xây dựng các ma trận độ cứng $[K]$ và véc tơ tải trọng $\{P\}$ biến động xung quanh giá trị kỳ vọng của nó. Dẫn đến các ma trận trong (1.73) cũng biến động xung quanh giá trị kỳ vọng $[K_0]$, $\{U_0\}$ và $\{P_0\}$. Triển khai chuỗi Taylor của các đại lượng trong (1.73) xung quanh đại lượng là giá trị kỳ vọng toán thu được (1.74) - (1.76):

$$[K] = [K_0] + \sum_{i=1}^N [K_i^I] r_i + \frac{1}{2} [K_{ij}^{II}] r_i r_j + \dots \quad (1.74)$$

$$\{U\} = \{U_0\} + \sum_{i=1}^N \{U_i^I\} r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U_{ij}^{II}\} r_i r_j + \dots \quad (1.75)$$

$$\{P\} = \{P_0\} + \sum_{i=1}^N \{P_i^I\} r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{P_{ij}^{II}\} r_i r_j + \dots \quad (1.76)$$

Các hệ số trong khai triển chuỗi Taylor được xác định như (1.77):

$$\begin{aligned} [K_i^I] &= \left. \frac{\partial [K]}{\partial r_i} \right|_{\{r\}=0} ; [K_{ij}^{II}] = \left. \frac{\partial^2 [K]}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\{r\}=0} ; \{U_i^I\} = \left. \frac{\partial \{U\}}{\partial r_i} \right|_{\{r\}=0} \\ \{U_{ij}^{II}\} &= \left. \frac{\partial^2 \{U\}}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\{r\}=0} ; \{P_i^I\} = \left. \frac{\partial \{P\}}{\partial r_i} \right|_{\{r\}=0} ; \{P_{ij}^{II}\} = \left. \frac{\partial^2 \{P\}}{\partial r_i \partial r_j} \right|_{\{r\}=0} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Thay các biểu thức (1.74) - (1.76) vào (1.73) sau đó đồng nhất hóa các hệ số cùng bậc tại hai vế của phương trình ta thu được:

$$\{U_0\} = [K_0]^{-1} \{P_0\} \quad (1.78)$$

$$\{U_i^I\} = [K_0]^{-1} \left(\{P_i^I\} - [K_i^I] \{U_0\} \right) \quad (1.79)$$

$$\{U_{ij}^{II}\} = [K_0]^{-1} \left(\{P_{ij}^{II}\} - [K_i^I] \{U_j^I\} - [K_j^I] \{U_i^I\} - [K_{ij}^{II}] \{U_0\} \right) \quad (1.80)$$

Thay (1.78) đến (1.80) vào (1.75) nhận được đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu. Do đó các đại lượng thống kê của chuyển vị có thể được tính toán thông qua các đặc trưng thống kê của tập hợp các biến ngẫu nhiên $\{r\}$.

✓ Ước lượng bậc nhất và bậc hai giá trị trung bình toán của $\{U\}$:

$$\mathbb{E}^I [\{U\}] \approx \{U_0\} \quad (1.81)$$

$$\mathbb{E}^{II} [\{U\}] = \{U_0\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U_{ij}^{II}\} \text{Cov}[r_i, r_j] \quad (1.82)$$

✓ Ước lượng bậc nhất và bậc hai của ma trận hiệp phương sai của véc tơ chuyển vị:

$$\text{Cov}^I [\{U\}, \{U\}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U_i^I\} \{U_j^I\}^T \text{Cov}[r_i, r_j] \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{II} [\{U\}, \{U\}] &= \text{Cov}^I [\{U\}, \{U\}] \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \{U\}_{ij} \{U\}_{km}^T \left[\begin{aligned} &\mathbb{E}(r_i r_j) \mathbb{E}(r_k r_m) + \mathbb{E}(r_i r_k) \mathbb{E}(r_j r_m) \\ &+ \mathbb{E}(r_i r_m) \mathbb{E}(r_j r_k) + \mathbb{E}(r_j r_k) \mathbb{E}(r_i r_m) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (1.84)$$

1.4.3. Phương pháp tiếp cận phổ

Phương pháp tiếp cận phổ đề xuất bởi Ghanem và Spanos [53] và được phát triển trong các nghiên cứu của các tác giả khác [50], [89]. Kỹ thuật này áp dụng nhóm phương pháp mở rộng chuỗi để biểu diễn trường ngẫu nhiên của các thông số đầu vào không chắc

chấn. Đáp ứng của kết cấu khi có các đại lượng đầu vào có tính ngẫu nhiên hoặc tham số không chắc chắn được biểu diễn là đa thức nhiễu động của các biến ngẫu nhiên. Đa thức nhiễu động được biểu diễn trong cơ sở của các hàm nhiễu động hoặc đa thức trực giao Askey. Xem xét kết cấu có E là trường ngẫu nhiên nên trận đàn hồi $[D]$ có thể được viết dưới dạng (1.85) với $[D_0]$ là ma trận tất định.

$$D(x, \theta) = [D_0]T(x, \theta) \quad (1.85)$$

Trong đó $T(x, \theta)$ được biểu diễn bằng phương pháp mở rộng chuỗi K-L như (1.86):

$$T(x, \theta) = \mu_T(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(x) \quad (1.86)$$

Trong đó:

- + $\mu_T(x)$: Hàm trung bình của trường ngẫu nhiên;
- + λ_i : Giá trị riêng;
- + $\varphi_i(x)$: Hàm riêng của hàm tự hiệp phương sai;
- + $\xi_i(\theta)$: Tập hợp các biến ngẫu nhiên được xác định như (1.87).

Nếu $T(x, \theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian thì các biến ngẫu nhiên này là biến ngẫu nhiên chuẩn Gaussian trực giao và không tương quan.

$$\xi_i(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_D D(x, \theta) \varphi_i(x) dx \quad (1.87)$$

Trong bối cảnh của FEM, $[K]_e$ được xác định (1.88):

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (1.88)$$

Thay (1.86) vào (1.88) thu được (1.89):

$$[K]_e = [K_0^e] + \sum_{i=1}^{\infty} [\Delta K_i^e] \xi_i(\theta) \quad (1.89)$$

Trong đó:

$$[K_0^e] = \int_{V_e} [B]^T \mu_T [D_0] [B] dV_e \quad (1.90)$$

$$[\Delta K_i^e] = \sqrt{\lambda_i} \int_{V_e} [B]^T [D_0] [B] \varphi_i(x) dV_e \quad (1.91)$$

Ma trận K được xác định như (1.92) được hình thành thông qua thuật toán ghép nối hệ ma trận cấp phần tử.

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta K_i \xi_i(\theta) \quad (1.92)$$

Trong đó:

$$K_0 = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0^e]^{Ext} \quad (1.93)$$

$$\Delta K_i = \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K_i^e]^{Ext} \quad (1.94)$$

Với N_e là tổng số lượng của phần tử. Phương trình cân bằng của toàn kết cấu như (1.95) trong trường hợp tải trọng tất định.

$$\left(K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta K_i \xi_i(\theta) \right) U(\theta) = P \quad (1.95)$$

Trong đó $U(\theta)$ là véc tơ chuyển vị nút tổng thể. Chuyển vị của một nút bất kỳ $u(\theta)$ được biểu diễn tuyến tính thông qua tập hợp các biến ngẫu nhiên trực giao Ψ_j như (1.96) với u_j tọa độ của $u(\theta)$ trong không gian nhận Ψ_j làm cơ sở. Biến ngẫu nhiên trực giao Ψ_j được biểu diễn dưới dạng đa thức nhiễu loạn của các biến ngẫu nhiên $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$. Các biến ngẫu nhiên trực giao Ψ_j thỏa mãn (1.97) - (1.100).

$$u(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \Psi_j \left(\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty} \right) \quad (1.96)$$

$$\Psi_0 = 1 \quad (1.97)$$

$$\mathbb{E}[\Psi_j] = 0 \quad (1.98)$$

$$\mathbb{E}[\Psi_k \Psi_l] = 1 \quad k = l \quad (1.99)$$

$$\mathbb{E}[\Psi_k \Psi_l] = 0 \quad k \neq l \quad (1.100)$$

Véc tơ chuyển vị nút tổng thể của toàn kết cấu được biểu diễn thông qua Ψ_j như (1.101):

$$U(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j \Psi_j \left(\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty} \right) \quad (1.101)$$

Thay (1.101) vào (1.95) thu được (1.102):

$$\left(K_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta K_i \xi_i(\theta) \right) \sum_{j=0}^{\infty} U_j \Psi_j \left(\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty} \right) = P \quad (1.102)$$

Đặt $K_0 = \Delta K_0$ và $\xi_0(\theta) = 1$ khi đó phương trình (1.102) được viết lại như (1.103):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta K_i \xi_i(\theta) U_j \Psi_j \left(\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty} \right) - P = 0 \quad (1.103)$$

Giữ lại M số hạng của chuỗi triển khai Karhunen–Loève và Q véc tơ cho việc mở rộng chuỗi nhiễu loạn của chuyển vị nút $U(\theta)$. Q sẽ phụ thuộc vào bậc của đa thức nhiễu loạn $\Psi_j \left(\left\{ \xi_i(\theta) \right\}_{i=0}^M \right)$ phương trình (1.103) được viết lại như (1.104).

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{Q-1} \Delta K_i \xi_i(\theta) U_j \Psi_j \left(\left\{ \xi_i(\theta) \right\}_{i=0}^M \right) - P = 0 \quad (1.104)$$

Sai số của phương trình (1.104) do xấp xỉ chuỗi Karhunen–Loève và đa thức nhiễu loạn $\Psi_j \left(\left\{ \xi_i(\theta) \right\}_{i=0}^M \right)$ như (1.105).

$$\varepsilon_{M,Q} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{Q-1} \Delta K_i \xi_i(\theta) U_j \Psi_j \left(\left\{ \xi_i(\theta) \right\}_{i=1}^{\infty} \right) - P \quad (1.105)$$

Để xấp xỉ với sai số là nhỏ nhất thì véc tơ chuyển vị $U(\theta)$ trong không gian nhận các hàm $\Psi_j \left(\left\{ \xi_i(\theta) \right\}_{i=0}^M \right)$ làm cơ sở thì phần dư là nhỏ nhất theo nghĩa bình phương trung bình. Điều đó có nghĩa phần dư phải trực giao với các hàm $\Psi_j \left(\left\{ \xi_i(\theta) \right\}_{i=0}^M \right)$ do đó:

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{M,Q}, \Psi_k] = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, Q-1 \quad (1.106)$$

Thay (1.105) vào (1.106) thu được (1.107):

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{Q-1} \mathbb{E}[\xi_i(\theta) \Psi_j \Psi_k] \Delta K_i U_j - \mathbb{E}[P \Psi_k] = 0 \quad (1.107)$$

Đặt $\mathbb{E}[\xi_i(\theta) \Psi_j \Psi_k] = c_{ijk}$; $\mathbb{E}[P \Psi_k] = P_k$ thay vào (1.107) ta có:

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{Q-1} c_{ijk} \Delta K_i U_j - P_k = 0 \quad (1.108)$$

Giải phương trình (1.108) thu được tương ứng chuyển vị U_j với $j = 0, 1, 2, \dots, Q-1$. Kỳ vọng toán của véc tơ chuyển vị nút U và ma trận hiệp phương sai được xác định như (1.109) và (1.110).

$$\mathbb{E}[U] = U_0 \quad (1.109)$$

$$\text{Cov}[U, U] = \sum_{j=1}^{Q-1} \mathbb{E}[\Psi_j^2] U_j U_j^T \quad (1.110)$$

Ghanem và Spanos [49], [53] sử dụng SFEM tiếp cận phổ kết hợp với rời rạc trường ngẫu nhiên mở rộng chuỗi nhiễu động phân tích dầm công-xôn có mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên một chiều chịu tác dụng của tải trọng tĩnh định ở đầu tự do và kết cấu tám hình vuông liên kết ngàm ở một biên tải trọng tác dụng tương ứng với bài toán phẳng. Tám có mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên hai chiều. Ghanem, R.-G. và Brzkala [48] phân tích

nền đất hai lớp chịu tác dụng của tải trọng tải định trên mặt tự do của nền đất, mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên Non-Gaussian. Waubke [125] phân tích ứng xử động của một tấm cứng trên nền đất hai lớp với thông số đàn hồi ngẫu nhiên. Grahnam [47] giải quyết bài toán dẫn nhiệt trong trường hợp độ dẫn nhiệt và nhiệt dung đều được biểu diễn toán học như các trường ngẫu nhiên Gaussian hoặc logarit chuẩn. N.-Z. Chen và C. Guedes Soares [27] đã phát triển SFEM dạng phổ cho bài toán tấm composite sử dụng chuỗi $K-L$.

1.5. TỔNG QUAN VỀ CÁC NGHIÊN CỨU CÓ LIÊN QUAN ĐẾN NỘI DUNG CỦA LUẬN ÁN

Ứng xử của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng và các tác động được mô tả toán học dưới dạng hệ phương trình vi phân tuân theo các điều kiện biên và điều kiện ban đầu. Tìm nghiệm giải tích cho các phương trình vi phân này thường gặp khó khăn do tính chất phức tạp của bài toán về mặt toán học. Những thập kỷ qua đã chứng kiến sự phát triển của các phương pháp rời rạc hóa để giải hệ phương trình vi phân, trong đó FEM được nghiên cứu và áp dụng phổ biến nhất. Ưu điểm chính của phương pháp FEM là có thể áp dụng cho các kết cấu có dạng hình học phức tạp, với các loại vật liệu và điều kiện biên khác nhau. Đồng thời phương pháp cũng phù hợp cho bài toán phi tuyến và phân tích phụ thuộc theo thời gian. Tuy nhiên FEM phân tích hệ thống với các yếu tố đầu vào tải định vì vậy gặp khó khăn khi mô tả hệ thống khi có các yếu tố đầu vào có tính chất ngẫu nhiên hoặc các tham số không chắc chắn. Trong thực tế sử dụng FEM tải định với mô hình hình học lý tưởng hóa và giá trị trung bình của tải trọng và các tính chất của vật liệu làm giảm ý nghĩa vật lý của bài toán. Các yếu tố ngẫu nhiên và các tham số không chắc chắn khi mô phỏng và phân tích mô hình: tính ngẫu nhiên liên quan đến yếu tố con người [64], tải trọng và các tác động [104], tính chất vật liệu [65], hoặc thiếu các dữ liệu để phân tích [81]. Vì vậy đòi hỏi phải định lượng hoặc dự đoán được ảnh hưởng và nguồn gốc của các yếu tố ngẫu nhiên đến đáp ứng của kết cấu [132].

1.5.1. Tổng quan ứng dụng của phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên trong các lĩnh vực khoa học

Sự phát triển SFEM, trên cơ sở tích hợp FEM tải định và lý thuyết tính toán ngẫu nhiên, đã cung cấp một công cụ mạnh mẽ để giải quyết các bài toán có chứa tham số bất định hoặc yếu tố ngẫu nhiên. Phương pháp này đã thu hút sự quan tâm sâu rộng từ cộng đồng nghiên cứu quốc tế, với các ứng dụng và phát triển tập trung chủ yếu vào các lĩnh vực: Khoa học vật liệu, Cơ sinh học, Kỹ thuật xây dựng và Địa kỹ thuật.

Đối với lĩnh vực Khoa học vật liệu SFEM đóng vai trò then chốt trong việc mô hình hóa tính không đồng nhất và các tính chất cơ học của vật liệu có cấu trúc vi mô phức tạp:

- ✓ Mô phỏng các tính chất ngẫu nhiên của vật liệu composite [60], [111], [131]; kết hợp phương pháp nhiễu loạn với biểu diễn trường ngẫu nhiên dùng để xác định đặc trưng cơ học của các loại vật liệu nhẹ [56], [102], [133].
- ✓ Mô hình hóa ảnh hưởng của sự không hoàn hảo và sự xuất hiện ngẫu nhiên hình thành các lỗ rỗng trong cấu trúc vật liệu xốp [22], [23], [29], [43], [110] cũng như kim loại bột [46], [90], [109].
- ✓ Đánh giá cường độ chịu kéo và độ tin cậy của vật liệu ván dăm gỗ thông định hướng tái chế ép keo thông qua các mô hình ngẫu nhiên [67], [68].

Trong lĩnh vực Cơ sinh học SFEM được ghi nhận là phương pháp phân tích tiên tiến nhằm xác định độ tin cậy trong lĩnh vực cơ xương khớp và hỗ trợ chẩn đoán y khoa:

- ✓ Phân tích cơ học khớp, động học xương khớp và xây dựng các mô hình cơ xương chi tiết [75].
- ✓ Nghiên cứu và phân tích ảnh hưởng của biến đổi hình thái cột sống [74], [86] và sự phân tán tính chất vật liệu của xương sọ người [100], [114], [124].
- ✓ Định lượng các yếu tố chi phối quá trình lão hóa của các bộ phận cấy ghép nhân tạo tại khớp háng và khớp gối [21], [38]; dự báo rủi ro vỡ phình động mạch chủ dựa trên các tiêu chí ứng suất ngẫu nhiên [39], [118].

Trong lĩnh vực Kỹ thuật xây dựng và Địa kỹ thuật các nghiên cứu được tiến hành tập trung vào việc đánh giá độ tin cậy và ổn định của kết cấu công trình dưới tác động của tính ngẫu nhiên về vật liệu và hình học:

- ✓ Địa kỹ thuật: Sử dụng phương pháp MCS để phân tích ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng trong nền đá vôi, đá dolomit đến độ lún công trình [54], [92]. Bên cạnh đó, Yao và cộng sự [130] đã áp dụng phương pháp nhiễu loạn để mô phỏng trường ngẫu nhiên của dòng chảy nước ngầm.
- ✓ Ổn định kết cấu: Xác định tải trọng ổn định ngẫu nhiên của các kết cấu chịu ảnh hưởng bởi khuyết tật hình học ban đầu. Tiêu biểu là nghiên cứu của Vryzidis và cộng sự [122] sử dụng phương pháp biểu diễn phổ kết hợp MCS cho ống thép. Hướng nghiên cứu này cũng được mở rộng cho các kết cấu thành mỏng [29], bể chứa bằng thép [70] và kết cấu vỏ [28], [93].
- ✓ Độ tin cậy môi: Đánh giá tuổi thọ môi của kết cấu cầu thép dưới tác động ngẫu nhiên của hoạt tải giao thông [57].

1.5.2. Tình hình nghiên cứu ngoài nước

1.5.2.1. Tổng quan các nghiên cứu phân tích tĩnh ngẫu nhiên kết cấu dầm

Trong những thập kỷ qua, việc phân tích sự không chắc chắn của tính chất vật liệu trong kết cấu dầm đã chuyển dịch từ các giả thiết đơn giản hóa sang các mô hình mô phỏng trường ngẫu nhiên phức tạp. Các nghiên cứu nền tảng, tiêu biểu là nghiên cứu của Vanmarcke và Grigoriu [121], đã đặt cơ sở cho SFEM thông qua kỹ thuật trung bình cục bộ. Nhóm tác giả này đã mô hình hóa độ cứng của dầm như một trường ngẫu nhiên một chiều, sử dụng hàm phương sai và tham số thang biến động để đánh giá ma trận hiệp phương sai giữa các phần tử. Mặc dù phương pháp này cho phép tính toán thống kê bậc hai của chuyển vị hiệu quả, nhưng nó vẫn phụ thuộc đáng kể vào kích thước lưới phần tử để đảm bảo độ chính xác của trường ngẫu nhiên.

Để khắc phục nhược điểm phụ thuộc vào lưới phần tử của phương pháp trung bình cục bộ, khái niệm tích phân trọng số đã được đề xuất và hoàn thiện qua chuỗi các nghiên cứu của Deodatis, Shinozuka và Takada. Deodatis [32] đã xây dựng và đề xuất công thức chính xác cho ma trận độ cứng ngẫu nhiên bằng cách biểu diễn các thành phần của ma trận độ cứng thông qua các biến ngẫu nhiên là tích phân của trường vật liệu nhân với các hàm tất định. Tiếp nối hướng đi này, Deodatis và Shinozuka [35] đã mở rộng phương pháp để đánh giá độ biến động đáp ứng và chỉ số độ tin cậy bằng phương pháp mô men bậc hai, chứng minh rằng độ chính xác của lời giải không còn bị giới hạn bởi khoảng tương quan của trường ngẫu nhiên. Đồng thời, Takada [120] đã đóng góp quan trọng khi áp dụng phương pháp tích phân có trọng số không chỉ cho ma trận độ cứng mà còn cho việc thiết lập các tải trọng nút tương đương, giúp chuyển đổi trường ngẫu nhiên liên tục thành bài toán với số lượng biến ngẫu nhiên hữu hạn mà không làm mất đi tính chặt chẽ về mặt toán học.

Song song với các phương pháp xấp xỉ, nhu cầu về các lời giải chính xác để làm chuẩn kiểm chứng cũng được quan tâm sâu sắc. Friedman và Kosmatka [44] đã thiết lập được ma trận độ cứng chính xác của dầm có tiết diện thay đổi theo quy luật tuyến tính hoặc parabol. Mặc dù đây là nghiên cứu trên cơ sở tất định, nó đã tạo tiền đề cho Adhikari và Mukherjee [16] phát triển phương pháp giải tích dựa trên cách tiếp cận Castigliano cho dầm có tham số biến đổi ngẫu nhiên không gian. Nhóm tác giả này đã chỉ ra hạn chế của việc sử dụng các hàm dạng tất định truyền thống trong SFEM và đề xuất các công thức dạng đóng cho ma trận độ cứng, giúp loại bỏ sai số do việc rời rạc hóa hình học. Ngoài ra, các lời giải đóng cho dầm chịu tải ngẫu nhiên với độ mềm ngẫu nhiên cũng được Elishakoff và cộng sự [40] công bố, cung cấp các kết quả chuẩn xác cho bốn lớp bài toán khác nhau.

Một hướng tiếp khác nhằm giải quyết bài toán khi tính chất vật liệu có độ biến động lớn là việc ứng dụng các nguyên lý biến phân. Ren và các cộng sự [99] đã đề xuất một phiên bản SFEM mới, thiết lập trực tiếp các phương trình cho hàm trung bình và hàm hiệp phương sai của chuyển vị. Khác với phương pháp nhiễu loạn truyền thống vốn chỉ hội tụ tốt khi COV nhỏ, phương pháp biến phân này cho phép xử lý hiệu quả các trường hợp vật liệu có độ bất định lớn, mang lại độ chính xác cao hơn trong việc dự báo đáp ứng kết cấu.

Mặc dù các lý thuyết cho trường ngẫu nhiên một chiều đã khá hoàn thiện, việc mô phỏng tính chất vật liệu biến đổi trong không gian hai chiều hoặc ba chiều vẫn là một thách thức lớn. Chakraborty và Bhattacharyya [25] đã nỗ lực mở rộng kỹ thuật trung bình cục bộ từ 2D sang trường ngẫu nhiên 3D kết hợp với khai triển Neumann và mô phỏng Monte Carlo. Nghiên cứu này cho thấy tiềm năng trong việc giảm thiểu chi phí tính toán thông qua việc phân rã ma trận độ cứng một lần duy nhất. Bên cạnh đó, Shariat và Rajabi [105] cũng đã xem xét bài toán dầm chịu uốn với cả vật liệu và tải trọng là các trường ngẫu nhiên phụ thuộc vị trí, nhấn mạnh ảnh hưởng của sự biến đổi không gian đến độ tin cậy của kết cấu. Wu và các cộng sự [126] đề xuất một phương pháp cập nhật mô hình thống kê cho kết cấu dầm chịu tải tĩnh có tính chất vật liệu ngẫu nhiên, thông qua việc đồng bộ hóa mô phỏng số với các số liệu thu được từ thực tế nhằm đánh giá và hiệu chỉnh các yếu tố ngẫu nhiên. Trên cơ sở khai thác hiệu quả các phương pháp giải tích, Wu và các cộng sự tiếp tục phát triển một phương pháp nhận dạng hư hỏng cho dầm với đặc tính ngẫu nhiên bằng giải tích đồng biến (homotopy analysis) [127]. Cortés López và các cộng sự [30] phân tích xác suất độ võng dầm công-xôn theo lý thuyết biến dạng Euler–Bernoulli, với các tham số vật liệu là biến ngẫu nhiên và tải trọng mô hình hóa bằng quá trình tương quan delta. Phương pháp sử dụng nguyên lý entropy cực đại và mô phỏng MCS để xác định phân bố xác suất của các đại lượng cơ học quan trọng như độ võng và nội lực.

1.5.2.2. Tổng quan các nghiên cứu phân tích dao động ngẫu nhiên của dầm, ổn định ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm

Kế thừa nền tảng từ bài toán tĩnh, các nghiên cứu động lực học ngẫu nhiên thường sử dụng SFEM dựa trên kỹ thuật nhiễu để xử lý sự phụ thuộc vào thời gian. T.P. Chang và H.C. Chang [26] đã áp dụng kỹ thuật này cho dầm có mặt cắt ngang thay đổi để đánh giá thống kê đáp ứng động, trong khi Hosseini và Khadem [63] mở rộng mô hình cho dầm quay chịu ảnh hưởng của lực ly tâm và tính chất vật liệu ngẫu nhiên một chiều. Mặc dù phương pháp này được biết đến là đơn giản và hiệu quả, nhưng các nghiên cứu kiểm chứng bằng MCS gần đây của N.T. Nhung và cộng sự [83] đã chỉ ra rằng nhiễu loạn bậc nhất

thường hội tụ kém khi xét đến các mode dao động bậc cao hoặc khi vật liệu có mức độ biến dạng lớn.

Để khắc phục hạn chế của SFEM truyền thống tại dải tần số cao, các phương pháp phổ và độ cứng động đã được phát triển mạnh mẽ. Gupta và Manohar [58] đề xuất phương pháp độ cứng động ngẫu nhiên cho dầm Timoshenko, cung cấp lời giải chính xác trong miền tần số, tạo tiền đề cho Adhikari và Manohar [15] giải quyết bài toán động thông qua thuật toán biến đổi Fourier biểu diễn trường ngẫu nhiên trong miền tần số. Song song đó, Ostoja-Starzewski và Woods [91] đã giới thiệu SSFEM để đánh giá ứng xử động lực học ngẫu nhiên của cấu kiện dầm xét đến tính ngẫu nhiên của tính chất vật liệu và kích thước hình học. Đáng chú ý, Adhikari [14] đã tích hợp các hướng đi này thành SSFEM kép, kết hợp khai triển K-L và khai triển phổ, giúp giải quyết bài toán hiệu suất tính toán cho hệ tuyến tính dải tần rộng.

Gần đây, hướng nghiên cứu đã chuyển dịch sang các hệ tương tác sát thực tế nhằm phân tích và định lượng ảnh hưởng của các yếu tố ngẫu nhiên. N.P. Cuong và các cộng sự [82] đã phân tích dao động của dầm được đặt trên nền đàn hồi với E của dầm biến đổi ngẫu nhiên không gian, trong khi T.D. Hien và cộng sự [117] đưa bài toán lên mức độ phức tạp hơn khi xét đến tương tác động lực học xe – cầu chịu tải trọng ngẫu nhiên. Tuy nhiên, một hạn chế lớn bao trùm lên hầu hết các nghiên cứu này là việc mô hình hóa trường ngẫu nhiên một chiều bỏ qua sự ngẫu nhiên theo phương các thông số hình học của mặt cắt.

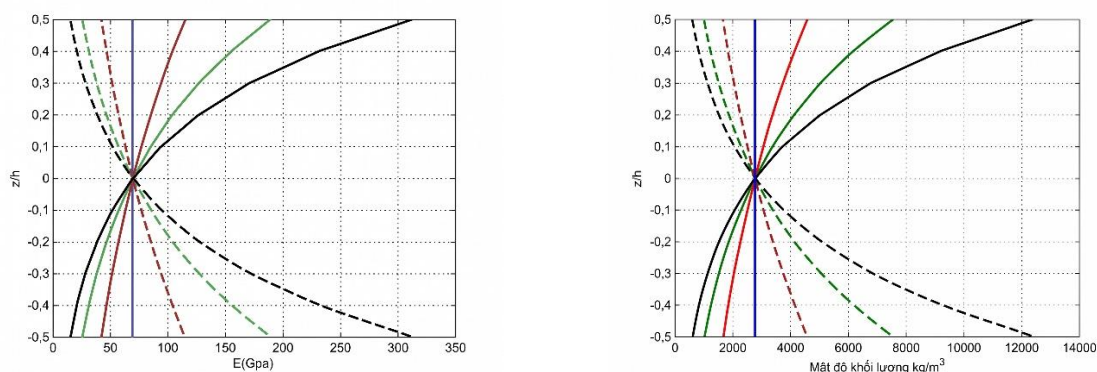
Bên cạnh các nghiên cứu về bài toán động lực học, vấn đề ổn định của cột chịu ảnh hưởng của các tham số ngẫu nhiên cũng nhận được nhiều sự quan tâm, đặc biệt là tính ngẫu nhiên của tính chất vật liệu và các sai số hình học ban đầu. Các nghiên cứu nền tảng của Ramu và Ganesan [18] hay Zhang và Ellingwood [136] đã thiết lập khung lý thuyết cho bài toán ổn định đàn hồi của cột, sử dụng kỹ thuật nhiễu loạn để thiết lập các biến đổi ngẫu nhiên của độ cứng chống uốn. Mở rộng sang các cấu kiện cột có hình học phức tạp hơn, Kala và cộng sự [69] cùng với D.T. Hang và cộng sự [37] đã nghiên cứu ảnh hưởng của độ cong ban đầu hoặc ngẫu nhiên tính chất vật liệu dưới dạng trường ngẫu nhiên đối với khả năng chịu lực của cột có mặt cắt ngang thay đổi. Đáng chú ý, T.D. Hien [116] đã áp dụng thành công kỹ thuật tích phân có trọng số cho phân tích ổn định tĩnh của cột có mặt cắt thay đổi, khắc phục được nhược điểm phụ thuộc vào kích thước lưới phần tử của các phương pháp truyền thống như phương pháp rời rạc điểm được thảo luận trong [37]. Tuy nhiên, điểm hạn chế chung của nhóm nghiên cứu này là vẫn giới hạn ở mô hình vật liệu đẳng hướng và các trường ngẫu nhiên một chiều, chưa phản ánh được sự phức tạp của các vật liệu tiên tiến hiện đại.

Một hướng nghiên cứu đã chuyển dịch mạnh mẽ sang phân tích ngẫu nhiên cho kết cấu làm bằng vật liệu composite và vật liệu có tính chất phi tuyến. Ganesan và Kowda [45] đã tiên phong giải quyết bài toán mất ổn định nén uốn của cấu kiện composite, trong đó các đặc trưng tính chất vật liệu bất định trong không gian được xử lý bằng lý thuyết đàn Timoshenko. Để khắc phục và giải quyết vấn đề dữ liệu thực nghiệm thường không tuân theo phân bố chuẩn, Sasikumar và cộng sự [103] đã phát triển SFEM cho đàn composite lớp với các đặc tính không đồng nhất phi Gauss, áp dụng kỹ thuật mở rộng tuyến tính tối ưu để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên sát với thực tế hơn. Song song đó, H.X. Nguyen và cộng sự [62] đã kết hợp phương pháp biểu diễn phổ với phân tích đẳng hình học để khảo sát mất ổn định cột, đạt được độ chính xác cao hơn so với FEM truyền thống. Mặc dù đã đạt được những tiến bộ trong việc mô hình hóa vật liệu phức tạp, nhưng đa số các nghiên cứu này vẫn đơn giản hóa sự biến đổi ngẫu nhiên của vật liệu theo từng lớp hoặc trong mặt phẳng 2D, bỏ qua sự biến đổi ngẫu nhiên 3D vốn là đặc trưng của vật liệu composite hoặc bê tông.

Gần đây, sự bùng nổ của trí tuệ nhân tạo và các phương pháp mô phỏng tiên tiến đã mở ra hướng đi mới nhằm giải quyết bài toán chi phí tính toán. Ly Hai Bang và cộng sự [79] đã đề xuất các mô hình lai (Hybrid AI) để dự báo tải trọng tới hạn của kết cấu, giảm đáng kể thời gian và chi phí tính toán so với việc chạy lặp phần tử hữu hạn. Tương tự, Yurdakul và cộng sự [134] cũng như Ibrahim và Makhloof [66] đã áp dụng các kỹ thuật lấy mẫu tiên tiến (Latin Hypercube Sampling) để phân tích độ nhạy và đánh giá độ tin cậy cho các cấu kiện bê tông có gia cường cốt thép chịu tải trọng. Tuy nhiên, các phương pháp này thường mang tính chất "hộp đen" hoặc dựa trên các phần tử đàn giản hóa (như phần tử thớ - fiber elements), do đó không thể hiện được tường minh cơ chế tương tác cơ học bên trong vật liệu khi xét đến trường ngẫu nhiên không gian ba chiều đầy đủ.

1.5.2.3. Tổng quan các nghiên cứu phân tích ngẫu nhiên dầm phân lớp chức năng (FGM)

Dầm chức năng (FGM) có tính chất vật liệu như E , ρ thay đổi liên tục dọc theo chiều cao của mặt cắt được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1980 tại Nhật Bản [73]. Hình 1.1 mô tả E và ρ thay đổi là hàm của chiều cao theo quy luật hàm số mũ. Các nghiên cứu về dầm FGM có thể tìm thấy các phân tích về bài toán uốn, ứng xử động hoặc phân tích ổn định tổng thể kết cấu [31], [61], [73], [76], [94], [123]. Tuy nhiên các nghiên cứu này tập trung vào dầm FGM có tính chất vật liệu thay đổi có quy luật xác định.



Hình 1.1. E và ρ của dầm FGM

Trong những năm gần đây, dầm FGM đã trở thành đối tượng nghiên cứu trong lĩnh vực cơ học ngẫu nhiên nhờ khả năng cải thiện hiệu suất chịu tải và tính tùy biến vật liệu theo chiều dày. Một số nghiên cứu tập trung vào phân tích dao động và đáp ứng cơ học của dầm FGM trong điều kiện bất định. Noh [88] nghiên cứu kết cấu dầm FGM có mặt cắt ngang thay đổi tuyến tính dọc theo chiều dài dầm và tính ngẫu nhiên không gian theo phương trục dọc của mô đun đàn hồi, kết quả cho thấy sự biến thiên ngẫu nhiên theo phương trục dọc gây ra sai khác đáng kể trong đáp ứng kết cấu. Tiếp tục hướng nghiên cứu này, N.V. Thuan và cộng sự [84] đã có những đóng góp quan trọng bằng cách phát triển SFEM cho phân tích dao động tự do ngẫu nhiên của dầm FGM với trường ngẫu nhiên trong không gian một chiều của mô đun đàn hồi được biểu diễn bằng phương pháp phổ kết hợp với FEM tiêu chuẩn. Kết quả cho thấy sự lan truyền của ngẫu nhiên vật liệu ảnh hưởng mạnh đến tần số riêng, đặc biệt khi chiều dài tương quan dọc theo chiều dài dầm tăng. Tiếp đó, N.V. Thuan và T.D. Hien [85] sử dụng kỹ thuật nhiễu loạn để khảo sát và phân tích dao động tự do của dầm FGM có mô đun đàn hồi bất định. Nhóm nghiên cứu đã chỉ ra rằng phương pháp này cho độ chính xác cao trong khi tiết kiệm chi phí tính toán so với MCS.

Một số báo cáo nghiên cứu công bố gần đây cũng đã tiếp cận vấn đề từ góc độ bất định mờ. Pham và các cộng sự [95] đã sử dụng khai triển Taylor để truyền lan bất định mờ trong bài toán dầm FGM, cho phép định lượng ảnh hưởng của các tham số mờ đầu vào đến đáp ứng kết cấu. Phương pháp này mang lại một giải pháp hiệu quả trong các tình huống mà dữ liệu đầu vào không được xác định một cách xác suất, chẳng hạn như trong môi trường thiết kế không chắc chắn hoặc thiếu dữ liệu thống kê. Ngoài ra, nghiên cứu của Amir, Kim và Choi [17] đã so sánh phân tích xác định và ngẫu nhiên đối với dầm cong FGM có lỗ rỗng. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng việc bỏ qua tính ngẫu nhiên có thể dẫn đến đánh giá sai lệch đáng kể về đáp ứng kết cấu, từ đó cho thấy tầm quan trọng của việc tích hợp yếu tố ngẫu nhiên trong thiết kế và đánh giá độ tin cậy kết cấu. Gần đây nhất, Zhang và cộng sự [137] giới thiệu một phương pháp bán giải tích cho phân tích tĩnh của

dầm FGM công-xôn có tính chất của vật liệu thay đổi ngẫu nhiên, qua đó làm rõ hơn vai trò của đặc tính ngẫu nhiên trong điều kiện tải trọng tĩnh.

1.5.3. Tình hình nghiên cứu trong nước

Tại Việt Nam, xu hướng nghiên cứu phân tích kết cấu dưới tác động của các yếu tố ngẫu nhiên và bất định đang phát triển mạnh mẽ, chuyển dịch từ các bài toán tất định truyền thống sang các mô hình xác suất nhằm phản ánh sát thực tế điều kiện làm việc của kết cấu công trình. Trong việc giải quyết bài toán phi tuyến và đánh giá an toàn, phương pháp MCS đã khẳng định được vai trò chủ đạo nhờ khả năng xử lý độ chính xác tùy ý. Các nghiên cứu nền tảng của Lê Anh Tuấn [13] về đáp ứng động phi tuyến của công trình biển hay Bùi Đức Năng [8] về hệ thanh chịu tải trọng phức tạp đều sử dụng MCS làm công cụ phân tích, chỉ ra những hạn chế của kỹ thuật tuyến tính hóa khi đối mặt với các hệ có tính phi tuyến mạnh. Kế thừa và phát triển hướng đi này, Vũ Trọng Huy [5] đã đề xuất biến thể cải tiến của MCS để phân tích kết cấu nhà dân dụng cao tầng chịu tác dụng tải động đất theo tiêu chuẩn TCVN, trong khi Nguyễn Ngọc Lâm [6] ứng dụng kỹ thuật này để làm sáng tỏ các đặc trưng thống kê của lực tới hạn trong cột có liên kết đàn hồi ngẫu nhiên.

Song song với các phương pháp mô phỏng đòi hỏi chi phí tính toán lớn, nhu cầu phát triển các công cụ giải tích gần đúng và lý thuyết phi xác suất cũng thu hút sự quan tâm nhằm tối ưu hóa quy trình thiết kế. Chu Thanh Bình [1] đã xây dựng thành công phương pháp gần đúng để tính toán độ tin cậy cho các cấu kiện cơ bản như dầm, cho phép xử lý linh hoạt các tham số hình học và tính chất vật liệu ngẫu nhiên mà không phải mô phỏng số lượng lớn các phép thử. Ở một cách tiếp cận khác, khi thông tin thống kê về đầu vào không đầy đủ, Lê Công Duy [2] đã vận dụng lý thuyết tập mờ để mô hình hóa các đặc trưng độ cản và tải trọng, mở ra hướng đánh giá an toàn cho khung nhiều tầng dựa trên độ tin cậy mờ thay vì xác suất cổ điển.

Bên cạnh việc phát triển phương pháp tính, các nghiên cứu trong nước cũng đi sâu vào phân tích đáp ứng của các kết cấu chịu khuyết tật và các giải pháp kiểm soát dao động trong môi trường ngẫu nhiên. Dương Thế Hùng [3], [4] đã tập trung khảo sát ảnh hưởng của các vết nứt, suy giảm độ cứng cục bộ và liên kết nửa cứng đến trạng thái ứng suất - biến dạng, làm rõ mối liên hệ giữa vị trí khuyết tật và độ nhạy của đáp ứng kết cấu. Liên quan đến vấn đề ổn định hệ dàn, Đoàn Như Sơn và các cộng sự [9] cũng đã lượng hóa vai trò của tính bất định trong các thanh giằng đối với độ tin cậy tổng thể. Đặc biệt, trong lĩnh vực điều khiển kết cấu, Nguyễn Trí Thọ và các cộng sự [11], [10] đã phát triển khung lý thuyết cho hệ dầm và khung không gian lắp đặt thiết bị giảm chấn khối lượng điều chỉnh

(TMD) chịu kích thích ồn trắng, kết hợp với trí tuệ nhân tạo để tối ưu hóa các tham số thiết kế nhằm giảm thiểu dao động một cách hiệu quả nhất.

Đối với lĩnh vực công trình giao thông, bài toán tương tác động lực học giữa cầu và phương tiện dưới tác dụng của tải trọng di động ngẫu nhiên đã đạt được những bước tiến quan trọng nhờ sự kết hợp chặt chẽ giữa mô hình số và thực nghiệm. Vũ Văn Toàn [12] đã xây dựng mô hình tương tác cầu - xe có xét đến độ mấp mô ngẫu nhiên của mặt đường và các đặc trưng cảm thực tế đo đạc từ hiện trường, cung cấp cơ sở tin cậy để đánh giá năng lực khai thác của cầu. Gần đây, Nguyễn Thị Kim Loan và các cộng sự [7] đã áp dụng phương pháp tiến hóa mật độ xác suất kết hợp với dữ liệu thực đo, giải quyết hiệu quả bài toán xác định đáp ứng cầu dầm khi các tham số về tải trọng xe và vận tốc di chuyển đều mang tính bất định, khắc phục được những hạn chế của các mô hình tải trọng tắt định.

Các công trình nghiên cứu trong nước đã bắt kịp xu hướng hiện đại trong việc phân tích ngẫu nhiên cũng như đánh giá độ tin cậy của kết cấu, với phương pháp chủ đạo là mô phỏng MCS. Tuy nhiên, MCS dẫn đến chi phí tính toán lớn, đồng thời các mô hình vật liệu hiện có phần lớn chỉ dừng lại ở biến ngẫu nhiên hoặc trường ngẫu nhiên một chiều. Các nghiên cứu nhằm mục đích phát triển SFEM để giải quyết bài toán trường ngẫu nhiên không gian đa chiều vẫn còn rất hạn chế.

1.5.4. Đánh giá tổng quan và vấn đề nghiên cứu

Trong lĩnh vực cơ học ngẫu nhiên, SFEM đã thể hiện được vai trò quan trọng trong việc phân tích ứng xử ngẫu nhiên của kết cấu có các thông số đầu vào mang tính bất định. Các yếu tố ngẫu nhiên này thường được mô hình hóa dưới dạng trường ngẫu nhiên không gian, biểu diễn sự biến thiên ngẫu nhiên của các đại lượng đầu vào như tính chất vật liệu, tải trọng tác dụng hoặc kích thước hình học của cấu kiện. Với khả năng kết hợp tận dụng ưu điểm giữa lý thuyết FEM tiêu chuẩn và lý thuyết thống kê ngẫu nhiên, SFEM cho phép đánh giá và định lượng ảnh hưởng của bất định đến đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu, từ đó góp phần nâng cao độ tin cậy trong thiết kế và khai thác kết cấu trong môi trường thực tế luôn tồn tại sự không chắc chắn.

Trong ngành kỹ thuật xây dựng, dầm và cột là những loại cấu kiện cơ bản và phổ biến nhất, do đó phân tích ngẫu nhiên kết cấu dầm, cột đã trở thành một chủ đề được quan tâm nghiên cứu rộng rãi với nhiều công bố. Nhìn lại bức tranh toàn cảnh về tình hình nghiên cứu trong và ngoài nước, có thể thấy các nghiên cứu hiện tại tập trung vào ba hướng phát triển chính: (i) Phát triển lý thuyết tính toán dầm để phân tích đáp ứng ngẫu nhiên kết cấu, (ii) Phát triển mô hình kết cấu và (iii) Phát triển mô hình ngẫu nhiên của tính chất vật liệu.

Mỗi hướng đều góp phần mở rộng phạm vi ứng dụng của SFEM và giải quyết các vấn đề kỹ thuật mang tính thực tiễn.

Thứ nhất, hướng phát triển lý thuyết tính toán chủ yếu tập trung vào việc tích hợp SFEM với các mô hình cơ học tiên tiến như lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hoặc các kỹ thuật hiện đại như phần tử hữu hạn đẳng hình học. Những cải tiến này giúp mô tả chính xác hơn ứng xử của dầm trong các điều kiện phức tạp, đặc biệt là khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng cắt hoặc vật liệu không đồng nhất.

Thứ hai, hướng phát triển mô hình kết cấu tập trung vào việc mở rộng phạm vi mô hình hóa để tiệm cận gần hơn với bài toán thực tế của kết cấu. Các công bố khoa học theo hướng này đã xem xét đến dầm đặt trên nền đàn hồi có độ cứng ngẫu nhiên, hoặc bài toán tương tác giữa dầm và tải di động với các tham số không chắc chắn như khối lượng, tốc độ di chuyển hoặc vị trí ban đầu của tải. Mô hình hóa các ảnh hưởng này dưới dạng ngẫu nhiên giúp đánh giá chính xác hơn các đáp ứng kết cấu trong điều kiện môi trường và tải trọng biến động.

Tuy nhiên, trong ba định hướng nêu trên, hướng thứ ba – phát triển mô hình ngẫu nhiên của tính chất vật liệu – được đánh giá là một lĩnh vực tiềm năng nhưng hiện còn nhiều khoảng trống tri thức. Phần lớn các nghiên cứu hiện nay chỉ xét đến tính ngẫu nhiên của tính chất vật liệu dưới dạng trường ngẫu nhiên một chiều, thường là biến thiên dọc trục. Một số công bố tiên tiến hơn đã kết hợp trường ngẫu nhiên theo chiều dọc với hàm tắt định mô tả sự biến thiên liên tục theo chiều cao mặt cắt phản ánh đặc trưng của vật liệu phân lớp chức năng. Mặc dù vậy, rất ít nghiên cứu xem xét tính chất vật liệu biến thiên ngẫu nhiên đồng thời theo hai hoặc ba phương không gian. Việc bỏ qua tính ngẫu nhiên không gian đa chiều có thể dẫn đến sai lệch trong dự đoán ứng xử kết cấu, đặc biệt trong các bài toán yêu cầu độ tin cậy cao.

Từ những phân tích trên, tác giả nhận thấy rằng phát triển SFEM để phân tích đáp ứng cơ học của dầm, cột có tính chất vật liệu phân bố ngẫu nhiên không gian đa chiều (2D và 3D) là một hướng nghiên cứu mới có ý nghĩa khoa học và thực tiễn cao. Hướng đi này không chỉ góp phần làm phong phú thêm lý thuyết tính toán trong cơ học ngẫu nhiên, mà còn mở rộng phạm vi ứng dụng của SFEM trong việc mô hình hóa và đánh giá kết cấu sử dụng các loại vật liệu phức tạp vốn có tính bất định trong môi trường thực tế. Đây cũng là bước tiến cần thiết để thu hẹp khoảng trống tri thức hiện nay và cung cấp cơ sở lý thuyết khoa học vững chắc cho các nghiên cứu và thiết kế các kết cấu hiện đại trong bối cảnh phát triển vật liệu tiên tiến và yêu cầu độ tin cậy ngày càng cao.

1.6. KẾT LUẬN CHƯƠNG I

Trên cơ sở nghiên cứu tổng quan và phân tích tình hình nghiên cứu trong và ngoài nước, các kết luận nền tảng và định hướng nghiên cứu chính của luận án được đúc kết:

Về cơ sở lý thuyết và phương pháp tiếp cận:

- ✓ **Biểu diễn trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên:** Mô hình trường ngẫu nhiên không gian Gaussian dừng là công cụ toán học tối ưu và phù hợp để mô tả tính biến thiên không gian của tính chất vật liệu, đặc biệt trong điều kiện các dữ liệu thống kê thực nghiệm còn hạn chế.
- ✓ **Kỹ thuật rời rạc hóa trường ngẫu nhiên:** Trong các phương pháp biểu diễn trường ngẫu nhiên, kỹ thuật tích phân trọng số thể hiện ưu điểm vượt trội về độ ổn định số học, khả năng bảo toàn đặc trưng thống kê của trường và tính độc lập với mật độ lưới chia phần tử. Kỹ thuật này đặc biệt tương thích và hiệu quả khi tích hợp vào khuôn khổ SFEM.
- ✓ **Phương pháp lan truyền và phân tích ngẫu nhiên:** Kỹ thuật tích phân trọng số kết hợp với phương pháp nhiễu loạn là hướng tiếp cận hiệu quả để xác định đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu; trong khi đó, phương pháp mô phỏng MCS sẽ đóng vai trò là thước đo chuẩn mực để kiểm chứng và xác thực độ tin cậy của mô hình đề xuất.

Về khoảng trống nghiên cứu: Tổng quan tài liệu chỉ ra rằng, hầu hết các công bố khoa học hiện nay về ứng xử của dầm, cột chịu ảnh hưởng của tính bất định của tính chất vật liệu mới chỉ dừng lại ở mô hình trường ngẫu nhiên một chiều (biến thiên dọc trục). Các nghiên cứu xét đến sự biến thiên đồng thời của tính chất vật liệu trong không gian đa chiều (ngẫu nhiên 2D, 3D) còn rất hạn chế. Việc bỏ qua tính ngẫu nhiên không gian đa chiều này dẫn đến việc đánh giá thiếu toàn diện về hiệu ứng trung bình hóa không gian, và chưa phản ánh sát với bản chất vật lý của sự không đồng nhất tính chất vật liệu trong thực tế.

Mục tiêu và nhiệm vụ nghiên cứu của luận án: Xuất phát từ các vấn đề đã được phân tích và khoảng trống tri thức vừa được chỉ ra, đề tài luận án "**PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỨNG XỬ CƠ HỌC CỦA DẦM, CỘT XÉT TỚI PHÂN BỐ NGẪU NHIÊN TÍNH CHẤT VẬT LIỆU**" đã được xác định với các nhiệm vụ cốt lõi sau:

- ✓ **Hệ thống hóa nền tảng lý thuyết:** Tổng hợp lý thuyết tính toán ngẫu nhiên và các kỹ thuật biểu diễn trường ngẫu nhiên trong khuôn khổ SFEM.
- ✓ **Phát triển SFEM:** Xây dựng các ma trận ngẫu nhiên của phần tử dầm, cột dựa trên kỹ thuật tích phân trọng số. Kết hợp với phương pháp nhiễu loạn để thiết lập chuỗi xấp xỉ bậc nhất của đáp ứng ngẫu nhiên, từ đó thiết lập các đại lượng thống kê bậc thấp của đáp ứng dầm, cột (kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn, hệ số biến thiên).

- ✓ **Giải quyết các bài toán cơ bản của cơ học:** Ứng dụng mô hình SFEM đề xuất để giải quyết trọn vẹn 03 bài toán cơ bản của dầm, cột có tính chất vật liệu phân bố ngẫu nhiên không gian:
 - (i) Phân tích tĩnh ngẫu nhiên kết cấu dầm (xác định đặc trưng thống kê chuyển vị của dầm).
 - (ii) Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên kết cấu dầm (xác định đặc trưng thống kê của giá trị riêng).
 - (iii) Phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên kết cấu cột chịu nén đúng tâm (xác định đặc trưng thống kê của lực tới hạn).
- ✓ **Khảo sát ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên tính chất vật liệu đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột:** Đánh giá định lượng ảnh hưởng của các đặc trưng trường ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu (chiều dài tương quan, hệ số biến thiên, tương quan chéo giữa các trường tính chất vật liệu) đến độ phân tán của đáp ứng ngẫu nhiên của dầm và cột, qua đó làm sáng tỏ vai trò chi phối của tính ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu đối với ứng xử cơ học của kết cấu.

CHƯƠNG II: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH TÍNH VÀ ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM PHẪNG CHỊU UỐN CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

2.1. MÔ HÌNH BÀI TOÁN

Xét dầm Euler-Bernoulli thẳng có chiều dài nhịp L , mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều rộng là b và chiều cao dầm là h , có mô đun đàn hồi E và mật độ khối lượng ρ . Trong trường hợp $E = E_0$ và $\rho = \rho_0$ là tất định, phương trình vi phân chuyển động tổng quát như (2.1) với A và I lần lượt là diện tích và mô men quán tính của mặt cắt ngang, $w(x,t)$ là độ võng theo phương đứng của dầm, $q(x,t)$ tải trọng phân bố:

$$E_0 I \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho_0 A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (2.1)$$

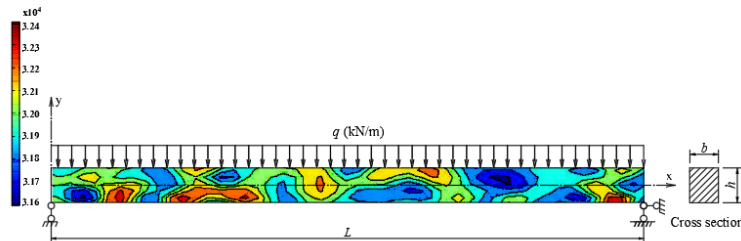
Xét trường hợp bài toán tĩnh phương trình vi phân cân bằng của dầm được viết lại:

$$E_0 I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2.2)$$

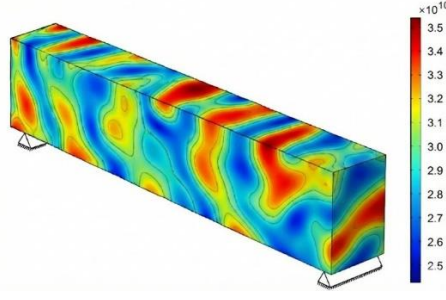
Đối với bài toán dao động tự do tương ứng $q(x,t) = 0$, tìm nghiệm dưới dạng tách biến $w(x,t) = \Phi(x)e^{-i\omega t}$ thì phương trình vi phân chuyển động của dầm trở thành bài toán trị riêng với $\Phi(x)$ là dạng dao động riêng và ω là tần số góc dao động riêng.

$$E_0 I \frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho_0 A \Phi(x) = 0 \quad (2.3)$$

Đối với điều kiện biên cụ thể, bài toán tĩnh thu được độ võng của dầm là nghiệm của (2.2) là duy nhất. Tương tự, giải bài toán trị riêng (2.3) thu được tập hợp các tần số dao động riêng và giá trị riêng hoàn toàn xác định. Do quá trình chế tạo vật liệu, cấu trúc vi mô của vật liệu, hoặc quá trình lão hóa các tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Hình 2.1 thể hiện trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều, trong khi Hình 2.2 mô tả dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều.



Hình 2.1. Dầm có E ngẫu nhiên hai chiều



Hình 2.2. Dầm có có E ngẫu nhiên ba chiều

Trong nghiên cứu này, mô đun đàn hồi E và mật độ khối lượng ρ của dầm được giả định là trường ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (2.4) và (2.5), ngẫu nhiên ba chiều như (2.6) và (2.7) :

$$E(\mathbf{x}, \theta) = E(x, y, \theta) = E_0 [1 + f(x, y, \theta)]; \quad f(x, y, \theta) > -1 \quad (2.4)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \theta) = \rho(x, y, \theta) = \rho_0 [1 + g(x, y, \theta)]; \quad g(x, y, \theta) > -1 \quad (2.5)$$

$$E(\mathbf{x}, \theta) = E(x, y, z, \theta) = E_0 [1 + f(x, y, z, \theta)]; \quad f(x, y, z, \theta) > -1 \quad (2.6)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \theta) = \rho(x, y, z, \theta) = \rho_0 [1 + g(x, y, z, \theta)]; \quad g(x, y, z, \theta) > -1 \quad (2.7)$$

Với E_0 và ρ_0 lần lượt là giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng. $f(x, y, \theta)$ và $g(x, y, \theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian hai chiều, dừng, có giá trị kỳ vọng bằng không. $f(x, y, z, \theta)$ và $g(x, y, z, \theta)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian ba chiều, dừng có giá trị kỳ vọng bằng không. Ký hiệu θ biểu thị rằng hai trường ngẫu nhiên này được xác định trên cùng một không gian xác suất và tương ứng với cùng một hiện thực vật lý của kết cấu. Ký hiệu $\mathbf{x} = (x, y)$ đối với không gian hai chiều và $\mathbf{x} = (x, y, z)$ đối với không gian ba chiều.

Nhằm đi sâu khảo sát ứng xử động lực học tuyến tính của hệ bảo toàn, các thành phần lực cản không được kể đến trong phương trình cân bằng động. Phương trình vi phân chuyển động của dầm trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên không gian có dạng:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\mathcal{D}(x, \theta) \frac{\partial^2 w(x, t, \theta)}{\partial x^2} \right] + \mathcal{M}(x, \theta) \frac{\partial^2 w(x, t, \theta)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2.8)$$

Với $\mathcal{D}(x, \theta)$ là độ cứng uốn hiệu dụng được xác định như (2.9), $\mathcal{M}(x, \theta)$ khối lượng hiệu dụng trên một đơn vị chiều dài được xác định như (2.10) .

$$\mathcal{D}(x, \theta) = \int_A y^2 E(\mathbf{x}, \theta) dy dz \quad (2.9)$$

$$\mathcal{M}(x, \theta) = \int_A \rho(\mathbf{x}, \theta) dy dz \quad (2.10)$$

Phương trình vi phân chủ đạo mô tả độ võng tĩnh ngẫu nhiên $w(x, \theta)$ như (2.11):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\mathcal{D}(x, \theta) \frac{\partial^2 w(x, \theta)}{\partial x^2} \right] = q(x) \quad (2.11)$$

Trong bài toán dao động tự do, tìm nghiệm dưới dạng tách biến $w(x, t, \theta) = \Phi(x, \theta) e^{-i\omega(\theta)t}$ thay vào phương trình vi phân chuyển động tổng quát thu được bài toán trị riêng ngẫu nhiên như phương trình sau:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\mathcal{D}(x, \theta) \frac{d^2 \Phi(x, \theta)}{dx^2} \right] - [\omega(\theta)]^2 \mathcal{M}(x, \theta) \Phi(x, \theta) = 0 \quad (2.12)$$

Việc tìm lời giải giải tích chính xác cho các phương trình vi phân (2.12) gặp phải những thách thức toán học lớn do các hệ số của phương trình là những trường ngẫu nhiên không gian có số bậc tự do vô hạn. Để giải quyết vấn đề này, luận án phát triển SFEM dựa trên kỹ thuật tích phân trọng để rời rạc hóa trường vật liệu nhằm đảm bảo tính ổn định của lưới, và sử dụng phương pháp nhiễu để giải hệ phương trình, cho phép xác định hiệu quả các đặc trưng thống kê của đáp ứng kết cấu dưới dạng biểu thức tường minh. Trong khuôn khổ của phương pháp nhiễu, luận án giả thiết độ biến động của vật liệu là vừa và nhỏ. Trên cơ sở đó, các đặc trưng hình học của tiết diện được coi là tất định. Đồng thời, các hiệu ứng xoắn ngẫu nhiên và uốn – xoắn kết hợp phát sinh do sự bất đối xứng cục bộ của vật liệu được bỏ qua trong các xấp xỉ bậc thấp.

Trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, được lựa chọn để mô hình hóa sự biến thiên ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu do những ưu điểm vượt trội về mặt toán học và khả năng áp dụng thực tiễn. Trường Gaussian là loại trường ngẫu nhiên duy nhất có thể mô tả hoàn toàn bằng hai đặc trưng thống kê là giá trị kỳ vọng và hàm tự tương quan, qua đó làm đơn giản hóa đáng kể quá trình xây dựng và phân tích mô hình. Tính dừng theo không gian đảm bảo rằng các đặc trưng thống kê của trường không phụ thuộc vào vị trí tuyệt đối mà chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tương đối, phù hợp với giả định tính dừng về mặt thống kê ở quy mô vĩ mô của vật liệu. Điều này cho phép áp dụng hiệu quả các phương pháp biến đổi phổ, chẳng hạn như biến đổi Fourier và phương pháp biểu diễn phổ nhằm sinh mẫu trường ngẫu nhiên phục vụ phân tích số. Ngoài ra, trong thực tế, nhiều tính chất vật liệu có nguồn gốc từ các quá trình ngẫu nhiên vi mô và thường có xu hướng hội tụ về phân bố Gaussian theo định lý giới hạn trung tâm. Do đó, việc sử dụng trường ngẫu nhiên Gaussian dừng không chỉ bảo đảm tính khả thi trong mô phỏng mà còn phản ánh hợp lý đặc trưng ngẫu nhiên của vật liệu trong các bài toán cơ học kỹ thuật.

Để đơn giản trong biểu diễn toán học, không mất đi tính tổng quát ký hiệu θ trong các phương trình (2.4) - (2.7) được lược bỏ khi đó bản thân các ký hiệu E và ρ thể hiện tính ngẫu nhiên. Các phương trình được viết lại như sau:

$$E(\mathbf{x}, \theta) = E(x, y) = E_0 [1 + f(x, y)]; \quad f(x, y) > -1 \quad (2.13)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \theta) = \rho(x, y) = \rho_0 [1 + g(x, y)]; \quad g(x, y) > -1 \quad (2.14)$$

$$E(\mathbf{x}, \theta) = E(x, y, z) = E_0 [1 + f(x, y, z)]; \quad f(x, y, z) > -1 \quad (2.15)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \theta) = \rho(x, y, z) = \rho_0 [1 + g(x, y, z)]; \quad g(x, y, z) > -1 \quad (2.16)$$

Các đại lượng thống kê của trường tính chất vật liệu được thiết lập dựa vào định nghĩa và các đại lượng thống kê của trường $f(x, y)$ và $f(x, y, z)$.

✓ Kỳ vọng toán của trường ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu:

$$\mathbb{E}[E(x, y)] = \mathbb{E}[E_0 (1 + f(x, y))] = E_0 \quad (2.17)$$

$$\mathbb{E}[E(x, y, z)] = \mathbb{E}[E_0 (1 + f(x, y, z))] = E_0 \quad (2.18)$$

$$\mathbb{E}[\rho(x, y)] = \mathbb{E}[\rho_0 (1 + g(x, y))] = \rho_0 \quad (2.19)$$

$$\mathbb{E}[\rho(x, y, z)] = \mathbb{E}[\rho_0 (1 + g(x, y, z))] = \rho_0 \quad (2.20)$$

✓ Mô-men bậc hai trung tâm của trường vật liệu ngẫu nhiên:

$$\text{var}[E(x, y)] = \mathbb{E}[(E(x, y) - E_0)^2] = E_0^2 \sigma_f^2 \quad (2.21)$$

$$\text{var}[E(x, y, z)] = \mathbb{E}[(E(x, y, z) - E_0)^2] = E_0^2 \sigma_f^2 \quad (2.22)$$

$$\text{var}[\rho(x, y)] = \mathbb{E}[(\rho(x, y) - \rho_0)^2] = \rho_0^2 \sigma_g^2 \quad (2.23)$$

$$\text{var}[\rho(x, y, z)] = \mathbb{E}[(\rho(x, y, z) - \rho_0)^2] = \rho_0^2 \sigma_g^2 \quad (2.24)$$

Với σ_f là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên $f(x, y)$ và $f(x, y, z)$. σ_g là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên $g(x, y)$ và $g(x, y, z)$. Hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên $f(x, y)$ và $f(x, y, z)$ được xác định như phương trình (2.25) và (2.26), của trường ngẫu nhiên $g(x, y)$ và $g(x, y, z)$ được xác định như phương trình (2.27) và (2.28) với d_x , d_y và d_z lần lượt là chiều dài tương quan theo các trục trong không gian. Hàm tương quan chéo giữa các trường ngẫu nhiên được xác định như (2.29) - (2.30) với γ là hệ số tương quan chéo (cross-correlation coefficient) của các trường.

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (2.25)$$

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (2.26)$$

$$R_{gg}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_g^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (2.27)$$

$$R_{gg}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma_g^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (2.28)$$

$$R_{fg}(\xi_1, \xi_2) = \gamma \sigma_f \sigma_g \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (2.29)$$

$$R_{fg}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \gamma \sigma_f \sigma_g \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (2.30)$$

2.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN BẰNG KỸ THUẬT TÍCH PHÂN TRỌNG SỐ BIỂU DIỄN TRƯỜNG NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN CỦA TÍNH CHẤT VẬT LIỆU

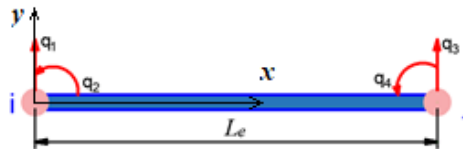
2.2.1. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Xét dầm mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao mặt cắt là h , chiều rộng mặt cắt là b và chiều dài nhịp là L như Hình 2.1. Mô đun đàn hồi của dầm thay đổi ngẫu nhiên dọc theo chiều dài và chiều cao dầm như phương trình (2.13) với E_0 là giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi, $f(x,y)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, hai chiều, có kỳ vọng bằng không. Theo FEM, kết cấu dầm được chia thành N_e phần tử. Khi đó E của phần tử thứ e được thiết lập như phương trình (2.31).

$$E_e(x, y) = E_0 [1 + f_e(x, y)]; \quad f_e(x, y) > -1 \quad (2.31)$$

Trong nghiên cứu này sử dụng phần tử dầm có hai nút, mỗi nút có hai bậc tự do như Hình 2.3. Quan hệ giữa chuyển vị của phần tử và chuyển vị nút của phần tử được xác định như phương trình (2.32).

$$w_i^e = [N] \{q_i\}^e \quad (2.32)$$



Hình 2.3. Mô hình của phần tử kết cấu dầm

Trong phương trình (2.32), $[N]$ là ma trận hàm dạng [78] được xác định như các công thức (2.33) - (2.34) với L_e là chiều dài của phần tử, $\{q_i\}^e$ là véc tơ chuyển vị nút của phần tử như phương trình (2.35).

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (2.33)$$

Với các hàm dạng được xác định như phương trình (2.34):

$$N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{L_e^2} + 2\frac{x^3}{L_e^3}; N_2 = x \left(1 - 2\frac{x}{L_e} + \frac{x^2}{L_e^2} \right) \quad (2.34)$$

$$N_3 = 3\frac{x^2}{L_e^2} - 2\frac{x^3}{L_e^3}; N_4 = x \left(-\frac{x}{L_e} + \frac{x^2}{L_e^2} \right)$$

$$\{q_i\}^e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \quad (2.35)$$

Thay phương trình (2.34) vào phương trình (2.33), ma trận hàm dạng của phần tử được viết lại như phương trình (2.36).

$$[N] = [r][\Lambda] \quad (2.36)$$

Trong phương trình (2.36), ma trận các hệ số $[\Lambda]$ và ma trận bao gồm các đơn thức $[r]$ được xác định như các phương trình (2.37) và (2.38).

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L_e^2} & -\frac{2}{L_e} & \frac{3}{L_e^2} & -\frac{1}{L_e} \\ \frac{2}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^3} & -\frac{2}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^2} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$[r] = [x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3] \quad (2.38)$$

Trong khuôn khổ của FEM tuyến tính, $[K]_e$ được tính toán như phương trình (2.39) với $[B]$ là ma trận tính biến dạng và $[D]$ là ma trận tính chất vật liệu. Đối với phần tử dầm các ma trận này xác định như các phương trình (2.40) - (2.41).

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV_e \quad (2.39)$$

$$[B] = -y[N''] \quad (2.40)$$

$$[D] = E_e(x, y) \quad (2.41)$$

Thay các phương trình (2.40) - (2.41) vào phương trình (2.39) thu được (2.42):

$$[K]_e = \int_{V_e} y^2 [N'']^T E_e(x, y) [N''] dV_e \quad (2.42)$$

Thay các công thức (2.31) và (2.36) vào phương trình (2.42) thu được phương trình sau:

$$[K]_e = \underbrace{[\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\}}_{[K_0]_e} + \underbrace{[\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 f_e(x, y) E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\}}_{[\Delta K]_e} [\Lambda] \quad (2.43)$$

Dựa vào phương trình (2.43) thấy rằng ma trận $[K]_e$ được phân tách thành hai thành phần: phần tắt định $[K_0]_e$ được xác định như phương trình (2.44) và phần ngẫu nhiên $[\Delta K]_e$ được xác định như phương trình (2.45).

$$[K_0]_e = [\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\} [\Lambda] \quad (2.44)$$

$$[\Delta K]_e = [\Lambda]^T \left\{ \int_{V_e} y^2 f_e(x, y) E_0 [r'']^T [r''] dV_e \right\} [\Lambda] \quad (2.45)$$

Đề ý đến phương trình (2.38) đại lượng $[r'']^T [r'']$ xuất hiện trong (2.44) - (2.45) được xác định như (2.46).

$$[r'']^T [r''] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Thay phương trình (2.46) vào phương trình (2.44) thu được phần tắt định của ma trận độ cứng của phần tử như phương trình (2.47).

$$[K_0]_e = \frac{E_0 I}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Phần ngẫu nhiên của ma trận $[K]_e$ được xác định bằng cách thay các phương trình (2.37) và (2.46) vào phương trình (2.45) thu được phương trình (2.48). Với các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong (2.48) được tính toán như (2.49). A_e là diện tích hình chữ nhật được giới hạn bởi chiều dài của phần tử và chiều cao mặt cắt.

$$[\Delta K]_e = E_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta K_1]_e} [\Lambda] \Theta_1^e \quad (2.48)$$

$$+ E_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta K_2]_e} [\Lambda] \Theta_2^e + E_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}}_{[\Delta K_3]_e} [\Lambda] \Theta_3^e$$

$$\Theta_i^e = \int_{A_e} x^{i-1} y^2 f_e(x, y) dA_e \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.49)$$

Để ý đến phương trình (2.37) các ma trận xuất hiện trong phương trình (2.48) được xác định như các phương trình (2.50) - (2.52):

$$[\Delta K_1]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$[\Delta K_2]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$[\Delta K_3]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$[K]_e$ có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên hai chiều được biểu diễn như (2.53) với Θ_i^e là các biến ngẫu nhiên được trung bình hóa từ trường ngẫu nhiên thông qua tích phân của trường ngẫu nhiên với các hàm của biến không gian x, y như phương trình (2.49).

$$[K]_e = [K_0]_e + [\Delta K_1]_e \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e \Theta_3^e \quad (2.53)$$

Θ_i^e gọi là các biến ngẫu nhiên cơ bản của phần tử. Trong trường hợp trường ngẫu nhiên đầu vào mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên Gaussian thì các biến ngẫu nhiên cơ bản cũng là biến ngẫu nhiên Gaussian. Để ý đến phương trình (2.53) ma trận $[K]_e$ là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Bài toán bao gồm N_e phần tử thì tổng số lượng biến ngẫu nhiên của bài toán là $3 \times N_e$ biến ngẫu nhiên.

2.2.2. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều

Xét kết cấu dầm có chiều dài nhịp L , mặt cắt ngang hình chữ nhật có bề rộng là b , chiều cao là h . Dầm có E và ρ thay đổi ngẫu nhiên hai chiều dọc theo chiều dài của kết cấu dầm và chiều cao mặt cắt. Theo FEM ma trận khối lượng của phần tử được xác định như phương trình (2.54):

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV_e \quad (2.54)$$

Dầm có E và ρ ngẫu nhiên hai chiều được biểu diễn như các phương trình (2.55), (2.56) với E_0 và ρ_0 là giá trị kỳ vọng của E và ρ , $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là các trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, hai chiều, có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$E(x,y) = E_0 [1 + f(x,y)]; \quad f(x,y) > -1 \quad (2.55)$$

$$\rho(x,y) = \rho_0 [1 + g(x,y)]; \quad g(x,y) > -1 \quad (2.56)$$

Theo FEM, kết cấu dầm được chia thành N_e phần tử, khi đó E và ρ thay đổi ngẫu nhiên hai chiều trong tọa độ của phần tử như các phương trình (2.57), (2.58).

$$E(x,y) = E_0 [1 + f_e(x,y)]; \quad f_e(x,y) > -1 \quad (2.57)$$

$$\rho(x,y) = \rho_0 [1 + g_e(x,y)]; \quad g_e(x,y) > -1 \quad (2.58)$$

Thay phương trình (2.58) vào phương trình (2.54) thu được phương trình (2.59).

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho_0 [1 + g_e(x,y)] [N]^T [N] dV_e \quad (2.59)$$

Để ý đến phương trình (2.36) phương trình (2.59) có thể được viết lại như sau:

$$[M]_e = \underbrace{[\Lambda]^T \int_{V_e} \rho_0 [r]^T [r] dV_e [\Lambda]}_{[M_0]_e} + \underbrace{[\Lambda]^T \int_{V_e} \rho_0 g_e(x,y) [r]^T [r] dV_e [\Lambda]}_{\sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e \Psi_i^e} \quad (2.60)$$

Ma trận $[r]^T [r]$ xuất hiện trong phương trình (2.60) được xác định như phương trình (2.61)

$$[r]^T [r] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Thay phương trình (2.61) vào phương trình (2.60) thu được phần tất định của ma trận khối lượng phần tử như (2.62) và phần ngẫu nhiên của ma trận khối lượng phần tử như (2.63).

$$[M_0]_e = \rho_0 A_e \begin{bmatrix} \frac{13}{35} L_e & \frac{11}{210} L_e^2 & \frac{9}{70} L_e & -\frac{13}{420} L_e^2 \\ & \frac{1}{105} L_e^3 & \frac{13}{420} L_e^2 & -\frac{1}{420} L_e^3 \\ & & \frac{13}{35} L_e & -\frac{11}{210} L_e^2 \\ \text{sym.} & & & \frac{1}{105} L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e \Psi_i^e &= \rho_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta M_1]_e} [\Lambda] \Psi_1^e + \rho_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta M_2]_e} [\Lambda] \Psi_2^e \\
&+ \rho_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta M_3]_e} [\Lambda] \Psi_3^e + \rho_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta M_4]_e} [\Lambda] \Psi_4^e + \rho_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta M_5]_e} [\Lambda] \Psi_5^e \\
&+ \rho_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[\Delta M_6]_e} [\Lambda] \Psi_6^e + \rho_0 b [\Lambda]^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[\Delta M_7]_e} [\Lambda] \Psi_7^e
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Các biến ngẫu nhiên Ψ_i^e xuất hiện trong phương trình (2.63) được xác định như phương trình (2.64) thông qua tích phân trọng số của trường ngẫu nhiên hai chiều mật độ khối lượng và các đơn thức.

$$\Psi_i^e = \int_{A_e} x^{i-1} g_e(x, y) dx dy \quad ; \quad i=1, 2, 3, \dots, 7 \tag{2.64}$$

Thay phương trình (2.37) vào phương trình (2.63) thu được các ma trận hệ số như các phương trình (2.65) - (2.71).

$$[\Delta M_1]_e = b \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

$$[\Delta M_2]_e = b \rho_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

$$[\Delta M_3]_e = \frac{b \rho_0}{L_e^2} \begin{bmatrix} -6 & -2L_e & 3 & -L_e \\ & L_e^2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

$$[\Delta M_4]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^3} \begin{bmatrix} 4 & -2L_e & -2 & L_e \\ & -4L_e^2 & 3L_e & -L_e^2 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$[\Delta M_5]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^4} \begin{bmatrix} 9 & 8L_e & -9 & 3L_e \\ & 6L_e^2 & -8L_e & 3L_e^2 \\ & & 9 & -3L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$[\Delta M_6]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^5} \begin{bmatrix} -12 & -7L_e & 12 & -5L_e \\ & -4L_e^2 & 7L_e & -3L_e^2 \\ & & -12 & 5L_e \\ \text{sym.} & & & -2L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$[\Delta M_7]_e = \frac{b\rho_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 4 & 2L_e & -4 & 2L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ & & 4 & -2L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Ma trận khối lượng của phần tử được viết lại như phương trình (2.72) là hàm của các biến ngẫu nhiên được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên hai chiều.

$$[M]_e = [M_0]_e + \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e \Psi_i^e \quad (2.72)$$

2.2.3. Biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Xét kết cấu dầm mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao mặt cắt là h , chiều rộng mặt cắt là b và chiều dài nhịp là L . E của kết cấu dầm ngẫu nhiên dọc theo chiều dài, chiều cao và bề rộng của dầm như phương trình (2.6) với E_0 là giá trị kỳ vọng của E , $f(x,y,z)$ là trường ngẫu nhiên dừng, ba chiều có kỳ vọng bằng không. E của phần tử thứ e được biểu diễn như (2.73).

$$E_e(x, y, z) = E_0 [1 + f_e(x, y, z)]; \quad f_e(x, y, z) > -1 \quad (2.73)$$

Khi tính chất vật liệu phân bố ngẫu nhiên không gian, sự bất đối xứng cục bộ trên mặt cắt ngang sẽ làm phát sinh các hiệu ứng thứ cấp như chuyển vị theo phương ngang, hiện tượng xoắn hoặc sự dịch chuyển của tâm uốn so với trọng tâm hình học. Tuy nhiên, do các trường ngẫu nhiên đầu vào có giá trị kỳ vọng bằng không và độ phân tán ở mức vừa và nhỏ, mức độ đóng góp của các hiệu ứng uốn - xoắn kết hợp này là không đáng kể. Về mặt lý thuyết xấp xỉ, kỳ vọng của các hiệu ứng thứ cấp này xấp xỉ bằng không trong phép

khai triển bậc nhất. Do đó, để tối ưu hóa khối lượng tính toán, các hiệu ứng này được xem là các vô cùng bé bậc cao và có thể được bỏ qua trong các mô hình xấp xỉ bậc thấp. Sử dụng phương pháp tích phân trọng số để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi được phát triển trong mục 2.2.1. $[K]_e$ có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên ba chiều được xác định như phương trình (2.74) với các biến ngẫu nhiên cơ bản được xác định như (2.75) và các ma trận được xác định như (2.76) - (2.78).

$$[K]_e = [K_0]_e + [\Delta K_1]_e \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e \Theta_3^e \quad (2.74)$$

$$\Theta_i^e = \int_{V_e} x^{i-1} y^2 f_e(x, y, z) dV_e \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.75)$$

$$[\Delta K_1]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$[\Delta K_2]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$[\Delta K_3]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

2.2.4. Biểu diễn trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều

Xét dầm có chiều dài nhịp L mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao mặt cắt là h , bề rộng mặt cắt là b . E và ρ của dầm thay đổi ngẫu nhiên ba chiều như các phương trình (2.79) và (2.80) với $f(x, y, z)$ và $g(x, y, z)$ là các trường ngẫu nhiên dừng, có giá trị kỳ vọng bằng không.

$$E(x, y, z) = E_0 [1 + f(x, y, z)]; \quad f(x, y, z) > -1 \quad (2.79)$$

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 [1 + g(x, y, z)]; \quad g(x, y, z) > -1 \quad (2.80)$$

Theo FEM kết cấu dầm được phân chia thành N_e phần tử. Ma trận $[M]_e$ của phần tử có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được xác định như phương trình (2.81) với các ma trận được xác định như các phương trình (2.82) - (2.88) và biến ngẫu nhiên được xác định như phương trình (2.89).

$$[M]_e = [M_0]_e + \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e \Psi_i^e \quad (2.81)$$

$$[\Delta M_1]_e = \rho_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$[\Delta M_2]_e = \rho_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$[\Delta M_3]_e = \frac{\rho_0}{L_e^2} \begin{bmatrix} -6 & -2L_e & 3 & -L_e \\ & L_e^2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$[\Delta M_4]_e = \frac{\rho_0}{L_e^3} \begin{bmatrix} 4 & -2L_e & -2 & L_e \\ & -4L_e^2 & 3L_e & -L_e^2 \\ & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$[\Delta M_5]_e = \frac{\rho_0}{L_e^4} \begin{bmatrix} 9 & 8L_e & -9 & 3L_e \\ & 6L_e^2 & -8L_e & 3L_e^2 \\ & & 9 & -3L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$[\Delta M_6]_e = \frac{\rho_0}{L_e^5} \begin{bmatrix} -12 & -7L_e & 12 & -5L_e \\ & -4L_e^2 & 7L_e & -3L_e^2 \\ & & -12 & 5L_e \\ \text{sym.} & & & -2L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$[\Delta M_7]_e = \frac{\rho_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 4 & 2L_e & -4 & 2L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ & & 4 & -2L_e \\ \text{sym.} & & & L_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$$\Psi_i^e = \int_{V_e} x^{i-1} g_e(x, y, z) dx dy dz \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, 7 \quad (2.89)$$

2.3. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN TĨNH

Phương trình cân bằng của toàn kết cấu khi phân tích tĩnh dầm bằng FEM như phương trình (2.90) với $[K]$ là ma trận độ cứng tổng thể được xác định thông qua ma trận độ cứng của phần tử như phương trình (2.91), véc tơ chuyển vị nút $\{U\}$ và véc tơ tải trọng nút $\{P\}$.

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (2.90)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext} \quad (2.91)$$

Thay phương trình (2.53) đối với bài toán dầm có E thay đổi ngẫu nhiên hai chiều hoặc phương trình (2.74) đối với bài toán dầm có E thay đổi ngẫu nhiên ba chiều vào phương trình (2.91) ta $[K]$ được xác định như phương trình (2.92) với ký hiệu $_{Ext}$ trong $[K]_e^{Ext}$ là ma trận mở rộng của phần tử thứ e . Ma trận này có cùng kích thước với ma trận tổng thể, được hình thành bằng cách đặt các phần tử của ma trận cục bộ vào đúng vị trí hàng và vị trí cột tương ứng với chỉ số của bậc tự do toàn cục của các nút thuộc phần tử, trong khi các số hạng còn lại được gán giá trị bằng không.

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \left([\Delta K_1]_e^{Ext} \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e^{Ext} \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e^{Ext} \Theta_3^e \right) \quad (2.92)$$

Đặt $[K_0] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext}$ là phần tắt định của ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu, thay vào (2.92) thu được (2.93).

$$[K] = [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \left([\Delta K_1]_e^{Ext} \Theta_1^e + [\Delta K_2]_e^{Ext} \Theta_2^e + [\Delta K_3]_e^{Ext} \Theta_3^e \right) \quad (2.93)$$

Để ý đến phương trình (2.93), $[K]$ là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_i^e\}_{i=1,2,3}^{e=1,2,\dots,N_e}$. Do đó véc tơ chuyển vị nút cũng là hàm của các biến ngẫu nhiên.

Phương trình (2.90) có thể viết lại dưới dạng như sau:

$$[K(\{\Theta\})]\{U(\{\Theta\})\} = \{P\} \quad (2.94)$$

Thực hiện triển khai các đại lượng tham gia trong (2.94) dưới dạng chuỗi Taylor xung quanh giá trị kỳ vọng $\bar{\Theta}_i^e$ của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}$ thu được (2.95) - (2.96).

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_i^e]_I (\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 [K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II} (\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}) (\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \dots \quad (2.95)$$

$$\{U\} \approx \{U_0\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{U_i^e\}_I (\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II} (\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}) (\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \dots \quad (2.96)$$

Các ma trận xuất hiện trong (2.95) - (2.96) được xác định như (2.97) - (2.100).

$$[K_i^e]_I = \left. \frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \right|_{\bar{\Theta}_i^e} \quad (2.97)$$

$$[K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II} = \left. \frac{\partial^2 [K]}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right|_{\bar{\Theta}_i^e} \quad (2.98)$$

$$\{U_i^e\}_I = \left. \frac{\partial \{U\}}{\partial \Theta_i^e} \right|_{\bar{\Theta}_i^e} \quad (2.99)$$

$$\{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II} = \left. \frac{\partial^2 \{U\}}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right|_{\bar{\Theta}_i^e} \quad (2.100)$$

Trong các phương trình (2.97) - (2.100) các ký hiệu: $[K_i^e]_I, \{U_i^e\}_I$ là đạo hàm riêng bậc I theo biến ngẫu nhiên Θ_i^e và $[K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II}, \{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II}$ là đạo hàm riêng bậc II theo biến ngẫu nhiên $\Theta_{i_1}^{e_1}$ và $\Theta_{i_2}^{e_2}$ được xác định tại giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên. Các biến ngẫu nhiên Θ_i^e được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên $f(x,y)$ hoặc trường ngẫu nhiên $f(x,y,z)$ có kỳ vọng bằng không nên các biến ngẫu nhiên Θ_i^e cũng có giá trị kỳ vọng bằng không. Thay vào các phương trình (2.95) - (2.96) thu được các phương trình:

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_i^e]_I \Theta_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 [K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II} \Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2} + \dots \quad (2.101)$$

$$\{U\} \approx \{U_0\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{U_i^e\}_I \Theta_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II} \Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2} + \dots \quad (2.102)$$

Thay các phương trình (2.101) - (2.102) vào phương trình (2.94) thực hiện đồng nhất các hệ số cùng bậc đạo hàm riêng thu được các phương trình:

✓ Bậc không:

$$\{U_0\} = [K_0]^{-1} \{P\} \quad (2.103)$$

✓ Đạo hàm bậc I:

$$\{U_i^e\}_I = -[K_0]^{-1} [K_i^e]_I \{U_0\} \quad (2.104)$$

✓ Đạo hàm bậc II:

$$\{U_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}\}_{II} = [K_0]^{-1} \left\{ -[K_{i_1}^{e_1}]_I \{U_{i_2}^{e_2}\}_I - [K_{i_2}^{e_2}]_I \{U_{i_1}^{e_1}\}_I - [K_{i_1 i_2}^{e_1 e_2}]_{II} \{U_0\} \right\} \quad (2.105)$$

Thay phương trình (2.104) vào phương trình (2.102) thu được xấp xỉ bậc nhất của véc tơ $\{U\}$ của toàn kết cấu như phương trình (2.106).

$$\{U\} \approx \{U_0\} - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_0]^{-1} [K_i^e]_I \{U_0\} \Theta_i^e \quad (2.106)$$

Thực hiện các phép toán xác định kỳ vọng và phương sai thu được giá trị kỳ vọng của véc tơ chuyển vị nút và ma trận hiệp phương sai của chuyển vị nút được xác định như các công thức từ (2.107) đến (2.108).

$$\mathbb{E}[\{U\}] \approx \mathbb{E}\left[\{U_0\} - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [K_0]^{-1} [K_i^e]_I \{U_0\} \Theta_i^e\right] \approx \{U_0\} \quad (2.107)$$

$$Cov[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & [K_0]^{-1} [K_{i_1}^{e_1}]_I \{U_0\} \times \\ & \{U_0\}^T \left([K_{i_2}^{e_2}]_I \right)^T \left([K_0]^{-1} \right)^T \end{aligned} \right\} \mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] \quad (2.108)$$

Để ý đến phương trình (2.93) $[K]$ được biểu diễn tuyến tính phụ thuộc vào biến ngẫu nhiên Θ_i^e do đó đạo hàm riêng bậc I của $[K]$ xuất hiện trong phương trình (2.108) có thể được xác định như phương trình (2.109) với ký hiệu $[\Delta K_i]_e^{Ext}$ là ma trận được mở rộng từ ma trận $[\Delta K_i]_e$. Các ma trận $[\Delta K_i]_e$ được xác định trong các phương trình (2.50) - (2.52) đối với bài toán dầm có E thay đổi ngẫu nhiên hai chiều và các phương trình (2.76) - (2.78) đối với bài toán dầm có E ngẫu nhiên 3D:

$$[K_i^e]_I = [\Delta K_i]_e^{Ext} \quad (2.109)$$

Thay phương trình (2.109) vào phương trình (2.108) thu được ma trận hiệp phương sai của véc tơ chuyển vị nút như sau:

$$Cov^I[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & [K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{U_0\} \times \\ & \{U_0\}^T \left([\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \right)^T \left([K_0]^{-1} \right)^T \end{aligned} \right\} \mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] \quad (2.110)$$

Giá trị kỳ vọng $\mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}]$ của các biến ngẫu nhiên Θ_i^e xuất hiện trong (2.110) được xác định thông qua trường ngẫu nhiên của E . Trong trường hợp mô đun đàn hồi của dầm là trường ngẫu nhiên hai chiều, để ý đến phương trình (2.49) giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên được xác định như phương trình (2.111). Tương tự cho trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên được xác định như phương trình (2.112).

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] = \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^{e_1} x_2^{i_2-1} y_2^{e_2} \mathbb{E}[f_{e_1}(x_1, y_1), f_{e_2}(x_2, y_2)] dA_{e_1} dA_{e_2} \quad (2.111)$$

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] = \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 \mathbb{E}[f_{e_1}(x_1, y_1, z_1), f_{e_2}(x_2, y_2, z_2)] dV_{e_1} dV_{e_2} \quad (2.112)$$

Giá trị kỳ vọng của trường ngẫu nhiên xuất hiện trong các phương trình (2.111) - (2.112) được xác định thông qua hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên như sau:

$$\mathbb{E}[f_{e_1}(x_1, y_1), f_{e_2}(x_2, y_2)] = R_{f_{e_1} f_{e_2}} \quad (2.113)$$

$$\mathbb{E}[f_{e_1}(x_1, y_1, z_1), f_{e_2}(x_2, y_2, z_2)] = R_{f_{e_1} f_{e_2}} \quad (2.114)$$

Thay các công thức từ (2.113) đến (2.114) vào các phương trình (2.111) - (2.112) thu được các phương trình (2.115) - (2.116).

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] = \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}} dA_{e_1} dA_{e_2} \quad (2.115)$$

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] = \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}} dV_{e_1} dV_{e_2} \quad (2.116)$$

Thay (2.115) - (2.116) vào (2.110) thu được ma trận hiệp phương sai của véc tơ chuyển vị trong hai trường hợp: mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (2.117) và mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều như (2.118).

$$Cov^I[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & [K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{U_0\} \{U_0\}^T \left([\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \right)^T \\ & \times \left([K_0]^{-1} \right)^T \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}} dA_{e_1} dA_{e_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

$$Cov^I[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & [K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{U_0\} \{U_0\}^T \left([\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \right)^T \times \\ & \left([K_0]^{-1} \right)^T \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}} dV_{e_1} dV_{e_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.118)$$

Phương sai của chuyển vị nút được xác định thông qua ma trận hiệp phương sai của chuyển vị nút là các giá trị nằm trên đường chéo chính của ma trận hiệp phương sai. Vì vậy phương sai của chuyển vị nút khi có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên được xác định:

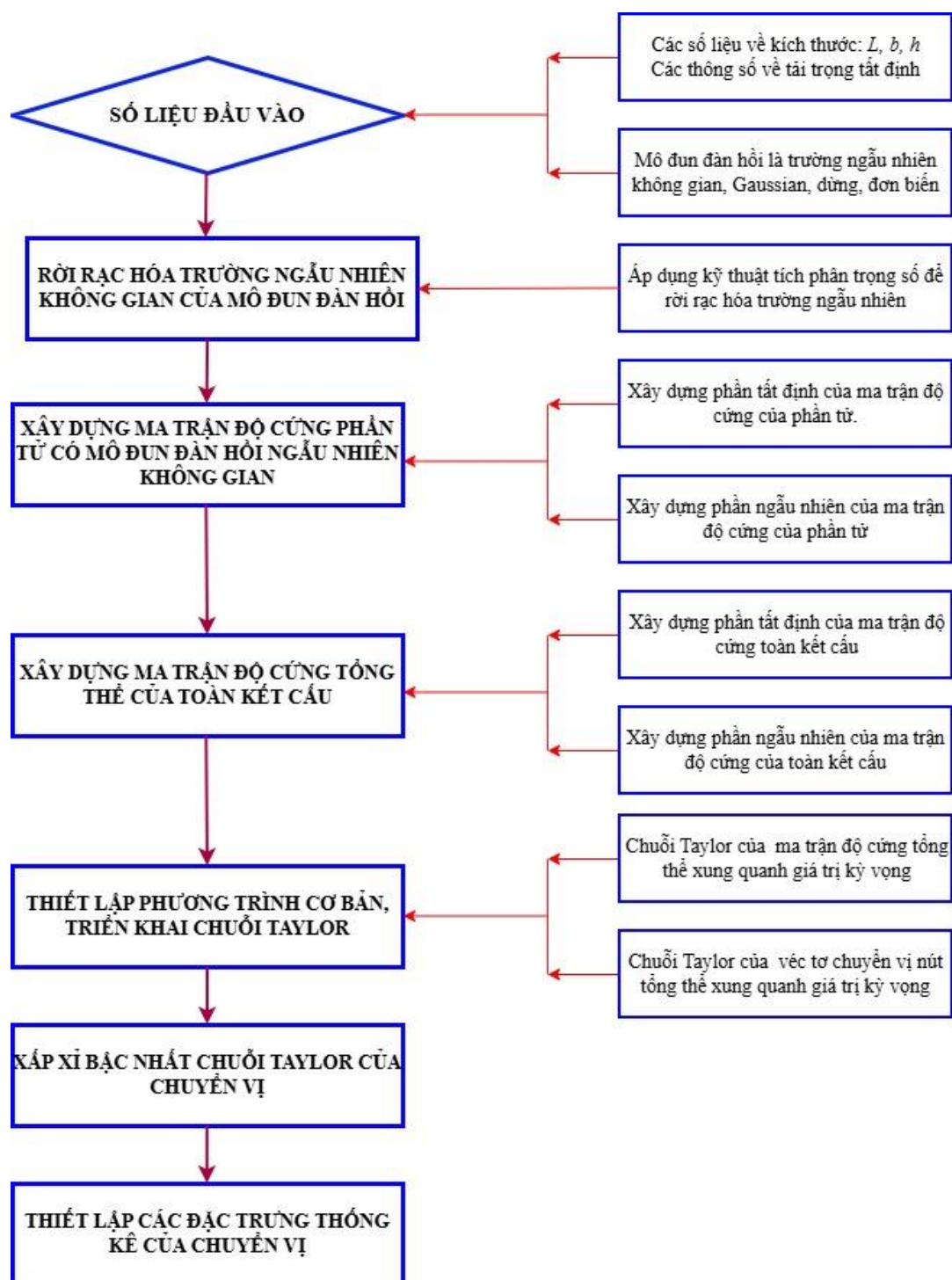
$$Var[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & diag \left([K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{U_0\} \right) \{U_0\}^T \left([\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \right)^T \times \\ & \left([K_0]^{-1} \right)^T \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}} dA_{e_1} dA_{e_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.119)$$

$$Var[\{U\}, \{U\}^T] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & diag \left([K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \{U_0\} \right) \{U_0\}^T \left([\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \right)^T \times \\ & \left([K_0]^{-1} \right)^T \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{f_{e_1} f_{e_2}} dV_{e_1} dV_{e_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

COV của chuyển vị nút tại giữa nhịp được xác định bằng tỷ số giữa độ lệch chuẩn của chuyển vị nút chia cho giá trị kỳ vọng của chuyển vị nút tại giữa nhịp như (2.121). Các

bước chính để phân tích ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian bằng SFEM được thể hiện trong Hình 2.4.

$$COV = \frac{\sqrt{Var\left[\{U\}, \{U\}^T\right]_{\frac{L}{2}}}}{\left|\mathbb{E}\left[\{U\}\right]_{\frac{L}{2}}\right|} \quad (2.121)$$



Hình 2.4. Các bước phân tích đáp ứng tĩnh ngẫu nhiên bằng SFEM

2.4. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN PHÂN TÍCH ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH

2.4.1. Phân tích dao động uốn tự do của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Xét kết cấu dầm mặt cắt ngang chữ nhật có chiều cao h , bề rộng b và chiều dài nhíp là L . Trong nghiên cứu này sử dụng phần tử dầm có hai nút tại hai đầu của phần tử, mỗi nút có hai bậc tự do. Quan hệ giữa chuyển vị của phần tử và chuyển vị nút của phần tử được xác định như phương trình sau:

$$w^e = [N] \{q_i\}^e \quad (2.122)$$

Với $[N]$ là ma trận hàm dạng [14] được xác định như các phương trình (2.123).

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (2.123)$$

Thế năng biến dạng uốn của phần tử được xác định như phương trình (2.124):

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV_e \quad (2.124)$$

Quan hệ giữa véc tơ biến dạng và chuyển vị nút của phần tử được xác định thông qua ma trận tính biến dạng $[B]$ như phương trình (2.125).

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q_i^e\} \quad (2.125)$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng được xác định theo định luật Hooke như phương trình (2.126) với $[D]$ là ma trận đàn hồi.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}^T \quad (2.126)$$

Thay các phương trình (2.125), (2.126) vào (2.124) thu được (2.127):

$$U^e = \frac{1}{2} \{q_i^e\}^T \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \{q_i^e\} \quad (2.127)$$

Động năng của phần tử được xác định như phương trình (2.128) với ρ là mật độ khối lượng:

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{w}^e\}^T \{\dot{w}^e\} dV_e \quad (2.128)$$

Thay phương trình (2.122) vào phương trình (2.128) thu được động năng của phần tử như phương trình (2.129):

$$T^e = \frac{1}{2} \{\dot{q}_i^e\}^T \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV_e \{\dot{q}_i^e\} \quad (2.129)$$

Sử dụng nguyên lý biến phân như (2.130) thu được phương trình vi phân dao động tự do không xét đến cản của bài toán như (2.131) với $[K]$ được xác định như phương trình (2.132), $[M]$ là ma trận khối lượng của toàn kết cấu được xác định như phương trình (2.133), $\{w\}$ là véc tơ chuyển vị nút tổng thể, $\{\ddot{w}\}$ là véc tơ gia tốc nút tổng thể.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{e=1}^{N_e} (T^e - U^e) dt = 0 \quad (2.130)$$

$$[M]\{\ddot{w}\} + [K]\{w\} = 0 \quad (2.131)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext} \quad (2.132)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^{N_e} [M]_e^{Ext} \quad (2.133)$$

Trong phương trình (2.132), với ma trận $[K]_e^{Ext}$ được xác định từ $[K]_e$ là ma trận độ cứng của phần tử được xác định như (2.134) và $[M]_e^{Ext}$ được thiết lập từ $[M]_e$ trong (2.133) là ma trận khối lượng của phần tử được xác định như (2.135).

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV_e \quad (2.134)$$

$$[M]_e = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV_e \quad (2.135)$$

Trong trường hợp kết cấu dao động điều hòa, véc tơ chuyển vị nút tổng thể có thể được giả định như phương trình (2.136) với $\{\Phi\}$ là biên độ dao động của các nút trong kết cấu, ω là tần số góc dao động riêng của kết cấu.

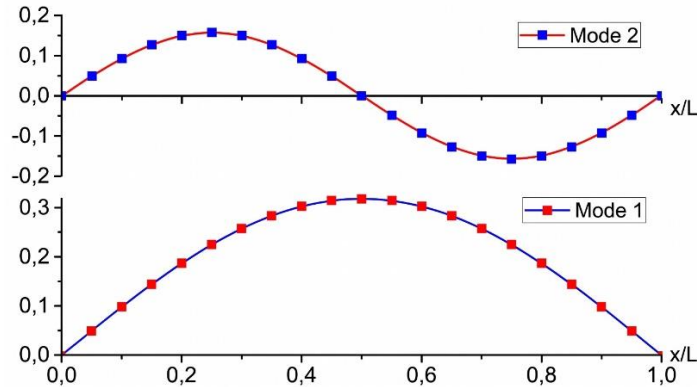
$$\{w\} = \{\Phi\} e^{-i\omega t} \quad (2.136)$$

Thay phương trình (2.136) vào phương trình (2.131) thu được phương trình (2.137):

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Phi\} e^{-i\omega t} = 0 \quad (2.137)$$

Tần số góc của dao động riêng được xác định từ điều kiện đảm bảo phương trình (2.137) có nghiệm khác không như phương trình (2.138):

$$\text{Det}([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (2.138)$$



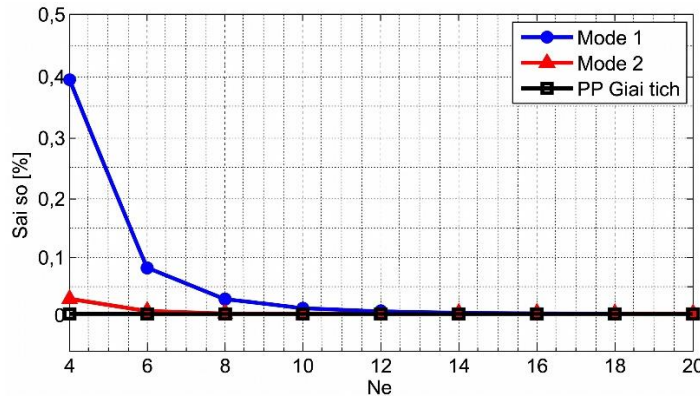
Hình 2.5. Mode dao động thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn

Hình 2.5 thể hiện mode dao động thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn. Để kiểm tra kết quả phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng FEM trong nghiên cứu này người viết so sánh kết quả phân tích tần số góc dao động riêng của dầm bằng FEM với phương pháp giải tích. Đối với dầm Euler-Bernoulli phương trình vi phân dao động tự do của dầm không xét đến cản được xác định như phương trình (2.139) với m là khối lượng phân bố trên một đơn vị chiều dài:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.139)$$

Giải phương trình (2.139) trong trường hợp bài toán dầm giản đơn, ta có tần số góc dao động riêng không xét đến cản trong trường hợp khối lượng phân bố đều như (2.140):

$$\omega_i^2 = \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 \frac{EI}{m} \quad (2.140)$$



Hình 2.6. Sai số của tần số góc dao động riêng xác định bằng FEM và giải tích

Hình 2.6 thể hiện sai số tần số góc dao động riêng thứ nhất và thứ hai của dầm giản đơn được xác định bằng FEM và phương pháp giải tích tương ứng với lưới chia phần tử thay đổi từ 4 đến 20 phần tử. Có thể nhận thấy khi số lượng phần tử tăng thì tần số góc dao động riêng của dầm bằng được phân tích bằng FEM tiến tới giá trị tần số góc dao động riêng được xác định bằng giải tích.

2.4.2. Phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Xem xét kết cấu dầm có chiều dài nhịp L , mặt cắt ngang hình chữ nhật có E và ρ ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều). Để ý đến các công thức (2.53) và (2.74) ma trận $[K]_e$ của phần tử là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên Θ_i^e . Tương tự ma trận $[M]_e$ cũng được biểu diễn tuyến tính thông qua các ma trận hệ số và các biến ngẫu nhiên Ψ_i^e . Theo (2.132) và (2.133) ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của toàn kết cấu dầm được

xác định từ ma trận độ cứng phần tử và ma trận khối lượng phần tử. Thay phương trình (2.53) vào phương trình (2.132) thu được $[K]$ trong trường hợp E thay đổi ngẫu nhiên hai chiều, thay phương trình (2.74) vào phương trình (2.132) thu được $[K]$ trong trường hợp E thay đổi ngẫu nhiên ba chiều. Tương tự, khi thay phương trình (2.72) vào phương trình (2.133) và phương trình (2.81) vào phương trình (2.133) thu được ma trận khối lượng của kết cấu dầm trong trường hợp mật độ khối lượng ngẫu nhiên trong không gian 2D và 3D.

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e = [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e \quad (2.141)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^{N_e} [M]_e = \sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e = [M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e \quad (2.142)$$

Đề ý đến phương trình (2.141) ma trận $[K]$ là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_i^e\}_{i=1,2,3}^{e=1,\dots,N_e}$. Tương tự ma trận khối lượng tổng thể của toàn kết cấu dầm cũng là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên $\{\Psi\} = \{\Psi_i^e\}_{i=1,\dots,7}^{e=1,\dots,N_e}$. Thay phương trình (2.141) và phương trình (2.142) vào phương trình (2.137) thu được (2.143).

$$\left[\left([K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e \right) - \omega^2 \left([M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e \right) \right] \{\Phi\} = 0 \quad (2.143)$$

Đặt $\lambda = \omega^2$ là giá trị riêng thay vào phương trình (2.143) thu được phương trình (2.144).

$$\left[\left([K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e \right) - \lambda \left([M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e \right) \right] \{\Phi\} = 0 \quad (2.144)$$

Đối với giá trị riêng thứ k và dạng dao động riêng thứ k thì:

$$\left[\underbrace{\left([K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e \right)}_{[K]} - \lambda_k \left([M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e \right) \right] \{\Phi\}_k = 0 \quad (2.145)$$

Vì ma trận độ cứng là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_i^e\}_{i=1,2,3}^{e=1,\dots,N_e}$, ma trận khối lượng là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Psi\} = \{\Psi_i^e\}_{i=1,\dots,7}^{e=1,\dots,N_e}$ nên giá trị riêng thứ k và dạng dao động riêng thứ k cũng là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_i^e\}_{i=1,2,3}^{e=1,\dots,N_e}$ và $\{\Psi\} = \{\Psi_i^e\}_{i=1,\dots,7}^{e=1,\dots,N_e}$. Triển khai chuỗi Taylor của ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, giá trị riêng thứ k và dạng dao động riêng thứ k ta có các phương trình (2.146) -(2.149):

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e \right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 [K]}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots \quad (2.146)$$

$$[M] \approx [M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_i^e - \bar{\Psi}_i^e \right) + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_{i_1}^{e_1} - \bar{\Psi}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &\approx \lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e \right) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_i^e - \bar{\Psi}_i^e \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_{i_1}^{e_1} - \bar{\Psi}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e, \bar{\Psi}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_k &\approx \{\Phi\}_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_i^e - \bar{\Theta}_i^e \right) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_i^e - \bar{\Psi}_i^e \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Theta_{i_2}^{e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \left(\Psi_{i_1}^{e_1} - \bar{\Psi}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e, \bar{\Psi}_i^e} \left(\Theta_{i_1}^{e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1} \right) \left(\Psi_{i_2}^{e_2} - \bar{\Psi}_{i_2}^{e_2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.149)$$

Trong các phương trình (2.146) - (2.149) các đạo hàm riêng bậc I và đạo hàm riêng bậc II của các đại lượng được xác định tương ứng với giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên. Ký hiệu $[\bullet]_{\bar{\Theta}_i^e}, [\bullet]_{\bar{\Psi}_i^e}, [\bullet]_{\bar{\Theta}_i^e, \bar{\Psi}_i^e}$ là giá trị của đạo hàm riêng được xác định tương ứng với kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên. Vì các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_i^e\}_{i=1,2,3}^{e=1,\dots,N_e}$ được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên có giá trị kỳ vọng toán bằng không. Do đó giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên này bằng không, tương tự với các biến ngẫu nhiên $\{\Psi\} = \{\Psi_i^e\}_{i=1,\dots,7}^{e=1,\dots,N_e}$ cũng có giá trị kỳ vọng bằng không. Thay vào các phương trình (2.146) - (2.149) thu được các phương trình (2.150) - (2.153).

$$[K] \approx [K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \Theta_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 [K]}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2} + \dots \quad (2.150)$$

$$[M] \approx [M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \Psi_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 M}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \Psi_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2} + \dots \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &\approx \lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \Psi_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \Psi_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e, \bar{\Psi}_i^e} \Theta_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2} + \dots \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} \{\Phi\}_k &\approx \{\Phi\}_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \Psi_i^e + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Theta_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Psi_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \Psi_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left[\frac{\partial^2 \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_{i_1}^{e_1} \partial \Psi_{i_2}^{e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_i^e, \bar{\Psi}_i^e} \Theta_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2} \end{aligned} \quad (2.153)$$

Thay các phương trình (2.150) - (2.153) vào phương trình (2.145), gom các hệ số cùng bậc đạo hàm thu được các phương trình sau:

✓ Bậc không:

$$([K_0] - \lambda_k^0 [M_0]) \{\Phi\}_k^0 = 0 \quad (2.154)$$

✓ Bậc nhất:

$$\begin{aligned} ([K_0] - \lambda_k^0 [M_0]) \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} &= \{\Phi\}_k^0 \left([M_0] \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \right) \\ ([K_0] - \lambda_k^0 [M_0]) \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \{\Phi\}_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} &= \{\Phi\}_k^0 \left([M_0] \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} + \lambda_k^0 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \right) \end{aligned} \quad (2.155)$$

Nhân cả hai vế của phương trình (2.145) với $\{\Phi\}_k^T$ thu được phương trình (2.156).

$$\{\Phi\}_k^T \left(\underbrace{\left([K_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_i^e \right)}_{[K]} - \lambda_k \left([M_0] + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 [\Delta M_i]_e^{Ext} \Psi_i^e \right) \right) \{\Phi\}_k = 0 \quad (2.156)$$

Điều kiện trực giao của các dạng dao động thỏa mãn (2.157) với δ_{ij} là ký hiệu Kronecker.

$$\begin{aligned} \{\Phi_i^0\}^T [M_0] \{\Phi_j^0\} &= \delta_{ij} \\ \{\Phi_i^0\}^T [K_0] \{\Phi_j^0\} &= \lambda_i^0 \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.157)$$

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (2.156) theo các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_i^e\}_{i=1,2,3}^{e=1,\dots,N_e}$, $\{\Psi\} = \{\Psi_i^e\}_{i=1,\dots,7}^{e=1,\dots,N_e}$ sử dụng tính chất trực giao như phương trình (2.157) và để ý đến phương trình (2.155) thu được các phương trình sau:

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} = \{\Phi_k^0\}^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} \{\Phi_k^0\} \quad (2.158)$$

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} = -\{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 \left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} \{\Phi_k^0\} \quad (2.159)$$

Ma trận độ cứng tổng thể và ma trận khối lượng tổng thể là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Do đó đạo hàm riêng bậc nhất của ma trận độ cứng tổng thể theo biến ngẫu nhiên Θ_i^e xuất hiện trong phương trình (2.158) được xác định như (2.160). Tương tự đạo hàm riêng bậc nhất của ma trận khối lượng theo biến ngẫu nhiên Ψ_i^e xuất hiện trong phương trình (2.159) được xác định như phương trình (2.161). Với $[\Delta K_i]_e^{Ext}$ được xác định bằng cách mở rộng ma trận $[\Delta K_i]_e$ bằng với kích thước của ma trận độ cứng tổng thể. Tương tự với ma trận $[\Delta M_i]_e^{Ext}$ thu được từ ma trận $[\Delta M_i]_e$.

$$\left[\frac{\partial [K]}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} = [\Delta K_i]_e^{Ext} \quad (2.160)$$

$$\left[\frac{\partial [M]}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} = [\Delta M_i]_e^{Ext} \quad (2.161)$$

Thay các phương trình (2.160) - (2.161) vào các phương trình (2.158) - (2.159) thu được:

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Theta_i^e} \right]_{\bar{\Theta}_i^e} = \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \quad (2.162)$$

$$\left[\frac{\partial \lambda_k}{\partial \Psi_i^e} \right]_{\bar{\Psi}_i^e} = -\{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \quad (2.163)$$

Thay các phương trình (2.162) - (2.163) vào phương trình (2.152) thu được xấp xỉ bậc nhất của giá trị riêng như phương trình sau:

$$\lambda_k \approx \lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left(-\{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \right) \Psi_i^e \quad (2.164)$$

Kỳ vọng của giá trị riêng thứ k được xác định như phương trình:

$$\mathbb{E}[\lambda_k] \approx \mathbb{E}\left[\lambda_k^0 + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\} \Theta_i^e + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^7 \left(-\{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_i]_e^{Ext} \{\Phi_k^0\}\right) \Psi_i^e\right] \approx \lambda_k^0 \quad (2.165)$$

Thực hiện phép tính phương sai của giá trị riêng thứ k thu được phương trình:

$$\begin{aligned} Var[\lambda_k] &= \mathbb{E}\left[(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k])(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k])\right] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_1}]_{e_1}^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_2}]_{e_2}^{Ext} \{\Phi_k^0\} \mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] \\ &\quad + \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_{i_1}]_{e_1}^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T \lambda_k^0 [\Delta M_{i_2}]_{e_2}^{Ext} \{\Phi_k^0\} \mathbb{E}[\Psi_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2}] \\ &\quad + 2 \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \{\Phi_k^0\}^T [\Delta K_{i_1}]_{e_1}^{Ext} \{\Phi_k^0\} \{\Phi_k^0\}^T (-\lambda_k^0) [\Delta M_{i_2}]_{e_2}^{Ext} \{\Phi_k^0\} \mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2}] \end{aligned} \quad (2.166)$$

Các giá trị kỳ vọng xuất hiện trong phương trình (2.166) có thể được xác định thông qua hàm tự tương quan và hàm tương quan chéo của các trường ngẫu nhiên. Hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên $f(x,y)$ hoặc $f(x,y,z)$ là R_{ff} , hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên $g(x,y)$ hoặc $g(x,y,z)$ là R_{gg} . Trong nghiên cứu này, trường ngẫu nhiên E và trường ngẫu nhiên ρ được xem xét là có tương quan với nhau thông qua γ và hàm tương quan chéo của $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là R_{fg} như phương trình (2.167) trong trường hợp ngẫu nhiên hai chiều, tương tự hàm tương quan chéo được xác định như (2.168) trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều. Giá trị của hệ số tương quan thay đổi từ -1 đến $+1$.

$$R_{fg} = \gamma \sigma_f \sigma_g \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y}\right] \quad (2.167)$$

$$R_{fg} = \gamma \sigma_f \sigma_g \exp\left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z}\right] \quad (2.168)$$

Để ý đến (2.49) và (2.64) trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên hai chiều. Các giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (2.166) được xác định như các phương trình sau:

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Theta_{i_2}^{e_2}] = \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{ff} dA_{e_1} dA_{e_2} \quad (2.169)$$

$$\mathbb{E}[\Psi_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2}] = \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} R_{gg} dA_{e_1} dA_{e_2} \quad (2.170)$$

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1}^{e_1} \Psi_{i_2}^{e_2}] = \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} R_{fg} dA_{e_1} dA_{e_2} \quad (2.171)$$

Để ý đến các phương trình (2.75) và phương trình (2.89) trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên ba chiều. Các giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (2.166) được xác định như các phương trình sau:

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Theta_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}y_2^2R_{ff}dV_{e_1}dV_{e_2} \quad (2.172)$$

$$\mathbb{E}\left[\Psi_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}}x_1^{i_1-1}x_2^{i_2-1}R_{gg}dV_{e_1}dV_{e_2} \quad (2.173)$$

$$\mathbb{E}\left[\Theta_{i_1}^{e_1}\Psi_{i_2}^{e_2}\right]=\int_{V_{e_1}}\int_{V_{e_2}}x_1^{i_1-1}y_1^2x_2^{i_2-1}R_{fg}dV_{e_1}dV_{e_2} \quad (2.174)$$

Thay các phương trình (2.169) - (2.171) vào phương trình (2.166) thu được phương sai của giá trị riêng ở dạng dao động thứ k trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (2.175).

$$\begin{aligned} Var[\lambda_k] &= \mathbb{E}\left[\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\right] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{ff} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \\ &\quad + \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} R_{gg} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \\ &\quad + 2 \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left(-\lambda_k^0 \right) \left[\Delta M_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} R_{fg} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \end{aligned} \quad (2.175)$$

Nếu chỉ xét đến tính ngẫu nhiên hai chiều của E hoặc ρ thì phương sai của giá trị riêng thứ k được lần lượt xác định như các công thức sau:

$$\begin{aligned} Var[\lambda_k] &= \mathbb{E}\left[\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\right] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{ff} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \end{aligned} \quad (2.176)$$

$$\begin{aligned} Var[\lambda_k] &= \mathbb{E}\left[\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\right] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} R_{gg} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \end{aligned} \quad (2.177)$$

Trong trường hợp E và ρ ngẫu nhiên ba chiều, đề ý đến các phương trình (2.172) - (2.174) thu được phương sai của giá trị riêng ở dạng dao động thứ k như phương trình sau:

$$\begin{aligned}
Var[\lambda_k] &= \mathbb{E}\left[\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\left(\lambda_k - \mathbb{E}[\lambda_k]\right)\right] \\
&= \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{ff} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \\
&+ \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} R_{gg} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \\
&+ 2 \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left(-\lambda_k^0 \right) \left[\Delta M_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} R_{fg} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\}
\end{aligned} \tag{2.178}$$

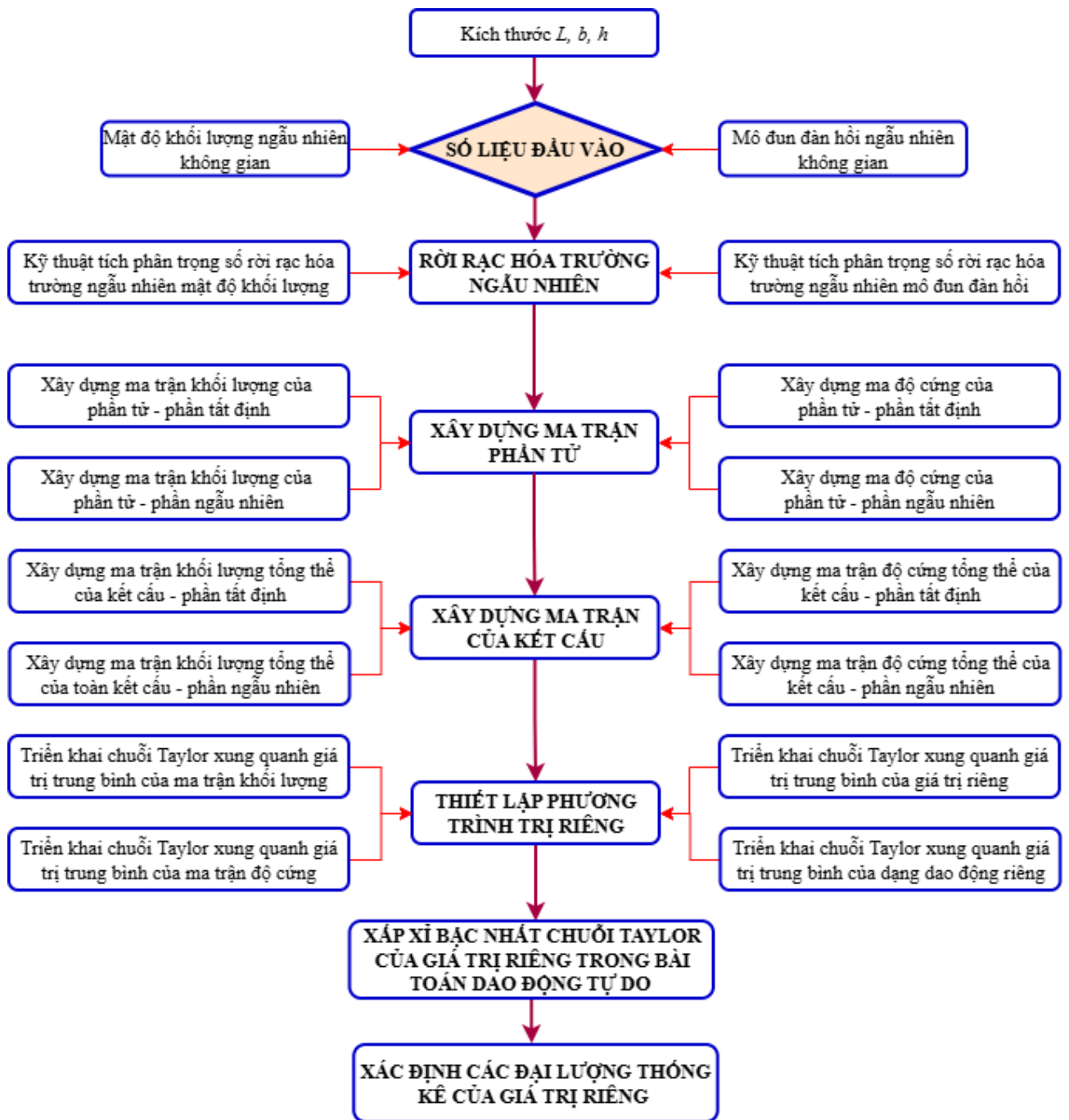
Tương tự cho bài toán ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu, khi nghiên cứu chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều hoặc chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều thì phương sai của trị riêng thứ k được xác định:

$$Var[\lambda_k] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \left[\Delta K_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\
\left. \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} y_1^2 x_2^{i_2-1} y_2^2 R_{ff} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \tag{2.179}$$

$$Var[\lambda_k] = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^7 \sum_{i_2=1}^7 \left\{ \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_1} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \left\{ \Phi_k^0 \right\}^T \lambda_k^0 \left[\Delta M_{i_2} \right]_e^{Ext} \left\{ \Phi_k^0 \right\} \times \right. \\
\left. \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} x_1^{i_1-1} x_2^{i_2-1} R_{gg} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \tag{2.180}$$

Để so sánh các chuỗi dữ liệu khác nhau thì COV của giá trị riêng được sử dụng để so sánh. COV xác định bằng tỉ số giữa độ lệch chuẩn của trị riêng và giá trị kỳ vọng như (2.181). Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên bằng SFEM thể hiện như Hình 2.7.

$$COV = \frac{\sqrt{Var[\lambda_k]}}{\mathbb{E}[\lambda_k]} \tag{2.181}$$



Hình 2.7. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng SFEM

2.5. PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DÀM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MÔ PHỎNG MONTE CARLO

Nội dung của phần này, một phương pháp thống kê được phát triển độc lập dựa trên FEM tiêu chuẩn kết hợp với biểu diễn phổ trường ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu để phân tích ứng xử của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Kết quả phân tích bằng MCS để kiểm chứng và xác thực kết phân tích bằng SFEM được đề xuất nghiên cứu và phát triển trong luận án này. Phương pháp MCS dựa trên việc tạo ra một tập

hợp mẫu của các trường ngẫu nhiên của các biến đầu vào. Từ đó thực hiện phân tích ứng xử của kết cấu trên tập mẫu đó thu được tập hợp các đáp ứng của kết cấu. Thực hiện xử lý số thống kê trên tập hợp các đáp ứng của kết cấu thu được các đặc trưng thống kê đáp ứng của kết cấu. Phương pháp MCS tỏ ra là một công cụ mạnh mẽ nhưng khi bài toán phức tạp với số chiều tăng lên thì dẫn đến khối lượng tính toán lớn. Thời gian tính toán và chi phí tính toán vì vậy cũng tăng. Phương pháp MCS đòi hỏi tính toán với số lượng mẫu đủ lớn để tính toán các đại lượng thống kê hoặc xác suất phá hoại của kết cấu. Mặc dù vậy MCS vẫn được chấp nhận phổ biến như là một kỹ thuật độc lập để kiểm tra so sánh với các phương pháp khác khi phân tích ngẫu nhiên. Một vài kỹ thuật đã được phát triển với mục đích giảm số lượng mẫu khi mô phỏng để giảm thời gian và chi phí khi tính toán [65].

2.5.1. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên hai chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ

Xét kết cấu dầm mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều dài nhịp L có E và ρ thay đổi ngẫu nhiên hai chiều. Mô đun đàn hồi của dầm là trường ngẫu nhiên dừng, hai chiều có hàm tự tương quan $R_{ff}(\xi_1, \xi_2)$ và hàm mật độ phổ công suất $S_{ff}(\kappa_1^f, \kappa_2^f)$ như các phương trình (2.182), (2.183) với σ_f là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên, d_x và d_y là chiều dài tương quan theo trục x dọc theo chiều dài dầm và chiều dài tương quan theo trục y dọc theo chiều cao dầm.

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (2.182)$$

$$S_{ff}(\kappa_1^f, \kappa_2^f) = 4\sigma_f^2 \frac{d_x d_y}{\left(1 + (\kappa_1^f d_x)^2\right) \left(1 + (\kappa_2^f d_y)^2\right)} \quad (2.183)$$

Tương tự, hàm ngẫu nhiên hai chiều trong biểu diễn mật độ khối lượng có $R_{gg}(\xi_1, \xi_2)$ và $S_{gg}(\kappa_1^g, \kappa_2^g)$ như các phương trình (2.184), (2.185) với σ_g là độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều.

$$R_{gg}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_g^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (2.184)$$

$$S_{gg}(\kappa_1^g, \kappa_2^g) = 4\sigma_g^2 \frac{d_x d_y}{\left(1 + (\kappa_1^g d_x)^2\right) \left(1 + (\kappa_2^g d_y)^2\right)} \quad (2.185)$$

Trong nghiên cứu này, trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi và trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng được xem xét có tương quan thông qua hệ số tương quan γ . Sử dụng phương

pháp biểu diễn phổ [107], [108] trường ngẫu nhiên được biểu diễn dưới dạng chuỗi lượng giác hữu hạn như phương trình:

$$f(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] \\ &+ B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.186)$$

Trong đó:

+ $A_{n_1 n_2}^f$ và $B_{n_1 n_2}^f$: Biên độ của các sóng điều hòa được xác định dựa vào hàm mật độ phổ công suất của trường ngẫu nhiên;

+ $\kappa_{1n_1}^f$ và $\kappa_{2n_2}^f$: Tần số không gian tương ứng trục x, y ;

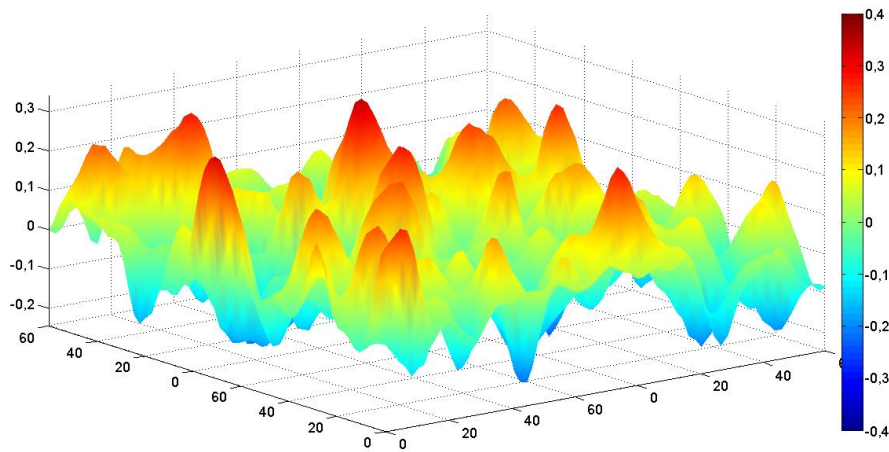
+ $\Phi_{n_1 n_2}^{(1f)}$ và $\Phi_{n_1 n_2}^{(2f)}$: Các góc pha ngẫu nhiên;

+ N_1 và N_2 : là số lượng các khoảng chia trên miền tần số không gian.

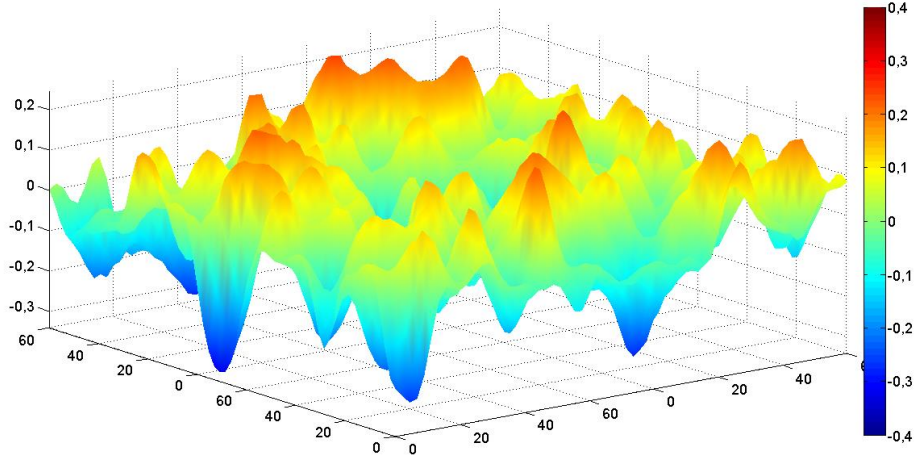
Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ [107], [108] trường ngẫu nhiên của mật độ khối lượng được biểu diễn như phương trình (2.187).

$$\begin{aligned} g(x, y) = & \gamma \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_g} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] \\ &+ B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \end{aligned} \right\} \\ & + \sqrt{1-\gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x + \kappa_{2n_2}^g y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1g)} \right] \\ &+ B_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x - \kappa_{2n_2}^g y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2g)} \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.187)$$

Sử dụng phương trình (2.186) và phương trình (2.187) biểu diễn một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên $f(x, y)$ và $g(x, y)$ trong trường hợp $\sigma_g = \sigma_f = 0,1$ và chiều dài tương quan $d_x = d_y = 4$, hệ số tương quan $\gamma = -1$ kết quả thể hiện như Hình 2.8 và Hình 2.9.



Hình 2.8. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên $f(x, y)$



Hình 2.9. Một hàm mẫu của trường ngẫu nhiên $g(x,y)$

2.5.2. Tạo mẫu trường ngẫu nhiên ba chiều tính chất vật liệu bằng phương pháp phổ

Để mô tả tính ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên theo không gian ba chiều. Biểu thức toán học của mô đun đàn hồi được biểu diễn như phương trình (2.188) với $f(x, y, z)$ là trường ngẫu nhiên ba chiều dừng, có kỳ vọng bằng không.

$$E(x, y, z) = E_0 [1 + f(x, y, z)]; \quad f(x, y, z) > -1 \quad (2.188)$$

Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ để tạo ra các hàm mẫu của trường ngẫu nhiên. Đối với trường ngẫu nhiên Gaussian, ba chiều, dừng được biểu diễn như (2.189):

$$f(x, y, z) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.189)$$

Trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng và trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi tương quan với nhau thông qua hệ số tương quan γ . Sử dụng phương pháp biểu diễn phổ [107], [108] trường ngẫu nhiên mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được biểu diễn dưới dạng tổng hữu hạn của các hàm cosine như phương trình sau:

$$\begin{aligned}
g(x, y, z) = & \gamma \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_g} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x + \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y + \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f x - \kappa_{2n_2}^f y - \kappa_{3n_3}^f z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \end{aligned} \right\} \\
& + \sqrt{1-\gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x + \kappa_{2n_2}^g y + \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x + \kappa_{2n_2}^g y - \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x - \kappa_{2n_2}^g y + \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g x - \kappa_{2n_2}^g y - \kappa_{3n_3}^g z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \right] \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{2.190}$$

2.5.3. Phân tích đáp ứng tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo

Trong bối cảnh của FEM, kết cấu dầm được phân chia thành N_e phần tử với E của phần tử ngẫu nhiên dọc theo chiều dài và chiều cao của phần tử như công thức (2.191) đối với bài toán E thay đổi ngẫu nhiên hai chiều và như phương trình (2.192) trong trường hợp E thay đổi ngẫu nhiên ba chiều.

$$E = E_0 [1 + f_e(x, y)] \tag{2.191}$$

$$E = E_0 [1 + f_e(x, y, z)] \tag{2.192}$$

Thay phương trình (2.186) vào phương trình (2.191) và viết lại theo hệ tọa độ của phần tử ta thu được phương trình (2.193) là E của phần tử với x_e và y_e là tọa độ phần tử, Δ_e là khoảng cách từ gốc tọa độ tổng thể đến gốc tọa độ phần tử thứ e của bài toán.

$$E = E_0 \left[1 + \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)} \right] + \\ & B_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)} \right] \end{aligned} \right\} \right] \tag{2.193}$$

Tương tự cho bài toán mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, mô đun đàn hồi của phần tử được xác định như phương trình (2.194).

$$E(x, y, z) = E_0 \left(1 + \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \right] \end{aligned} \right\} \right) \quad (2.194)$$

Ma trận độ cứng của phần tử được xác định như phương trình sau:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV_e \quad (2.195)$$

Thay phương trình (2.193) vào phương trình (2.195) thu được ma trận độ cứng của phần tử trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như (2.196). Ma trận $[K]_e$ bao gồm hai thành phần: Phần tiền định là $[K_0]_e$ và phần ngẫu nhiên là $[\Delta K]_e$.

$$\begin{aligned} [K]_e &= \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 [B] dV_e}_{[K_0]_e} \\ &+ \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)} \right] \\ &+ B_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)} \right] \end{aligned} \right\} [B] dV_e}_{[\Delta K]_e} \end{aligned} \quad (2.196)$$

Tương tự cho trường E của dầm thay đổi ngẫu nhiên ba chiều, $[K]_e$ của phần tử được xác định như phương trình (2.197) khi thay (2.194) vào (2.195).

$$\begin{aligned} [K]_e &= \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 [B] dV_e}_{[K_0]_e} \\ &+ \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \right] \end{aligned} \right\} [B] dV_e}_{[\Delta K]_e} \end{aligned} \quad (2.197)$$

Sử dụng phương trình (2.186) hoặc (2.189) tạo ra N mẫu của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi, khi đó ma trận độ cứng của phần tử thứ e được tạo ra ở lần mô phỏng thứ i được xác định như phương trình (2.198).

$$[K]_{e,i} = [K_0]_{e,i} + [\Delta K]_{e,i} \quad (2.198)$$

$[K]^i$ ở lần mô phỏng thứ i được thiết lập dựa trên ma trận $[K]_e$ như (2.199).

$$[K]^i = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_{e,i}^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_{e,i}^{Ext} \quad (2.199)$$

Phương trình cân bằng kết cấu ở lần mô phỏng thứ i được thiết lập theo FEM như (1.68) với $\{U\}^i$ là véc tơ chuyển vị nút tổng thể của toàn kết cấu.

$$[K]^i \{U\}^i = \{P\} \quad (2.200)$$

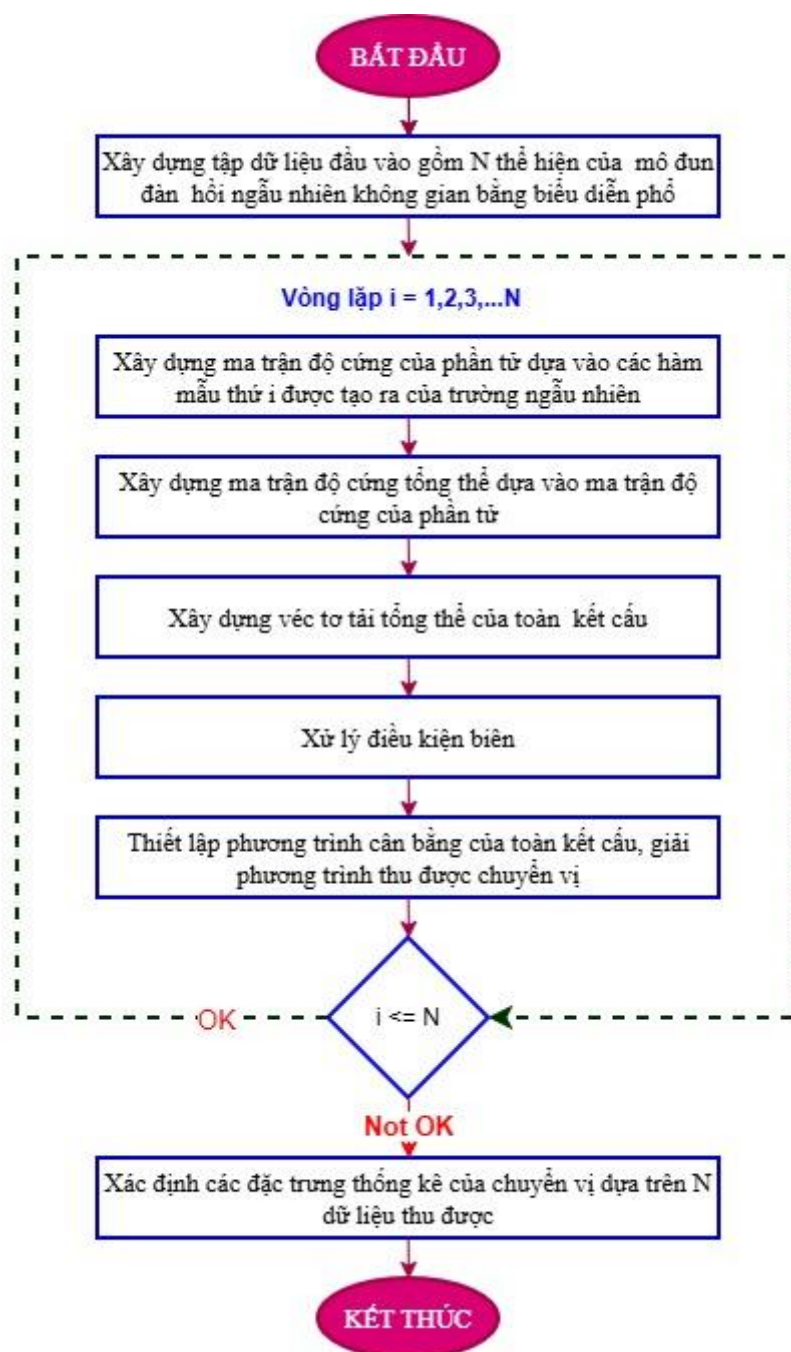
Xử lý điều kiện biên sau đó giải hệ phương trình thu được véc tơ chuyển vị nút của kết cấu ở lần mô phỏng thứ i . Thực hiện tính lặp trên không gian mẫu của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi được tạo ra thu được tập dữ liệu đáp ứng ngẫu nhiên của dầm. Xử lý thống kê trên tập hợp số liệu thu được các đặc trưng thống kê của chuyển vị nút thứ j : trung bình mẫu như phương trình (1.69) và phương sai mẫu như (2.202).

$$\bar{U}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_j^i \quad (2.201)$$

$$s_{U_j}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (U_j^i - \bar{U}_j)^2 \quad (2.202)$$

Trong trường hợp để so sánh mức độ biến thiên tương đối của những tập dữ liệu khác nhau, đặc trưng thống kê được sử dụng trong trường hợp này là COV được xác định như (1.71) bằng tỷ số giữa độ lệch chuẩn của mẫu và trung bình mẫu. Hình 2.10 trình bày sơ đồ tổng quát phân tích tĩnh ngẫu nhiên dầm bằng mô phỏng MCS

$$COV = \frac{\sqrt{s_{U_j}^2}}{|\bar{U}_j|} \quad (2.203)$$



Hình 2.10. Sơ đồ tổng quát phân tích tĩnh ngẫu nhiên bằng MCS

2.5.4. Phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian bằng mô phỏng Monte Carlo

E và ρ của dầm được biểu diễn dưới dạng tổng chuỗi hữu hạn ngẫu nhiên như các phương trình (2.204) và phương trình (2.205) cho bài toán tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều. Đối với bài toán tính chất đặc trưng của vật liệu ngẫu nhiên ba chiều, E và ρ được biểu diễn dưới dạng chuỗi ngẫu nhiên như phương trình (2.206) và (2.207):

$$E(x_e, y_e) = E_0 \left[1 + \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] + B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \right\} \right] \quad (2.204)$$

$$\rho(x_e, y_e) = \rho_0 \left[1 + \gamma \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_g} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] + B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \right\} + \sqrt{1-\gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^g y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1g)} \right] + B_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^g y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2g)} \right] \right\} \right] \quad (2.205)$$

$$E(x_e, y_e, z_e) = E_0 \left[1 + \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \right\} \right] \quad (2.206)$$

$$\rho(x_e, y_e) = \rho_0 \left[1 + \gamma \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_g} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \right\} + \sqrt{1-\gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ A_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^g y_e + \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^g y_e - \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^g y_e + \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \right] + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^g y_e - \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \right] \right\} \right] \quad (2.207)$$

Thay phương trình (2.204) vào phương trình (2.134) với ma trận độ cứng $[D]$ bằng mô đun đàn hồi $E(x_e, y_e)$ thu được ma trận $[K]_e$ trong trường hợp E ngẫu nhiên hai chiều như (2.208) với Δ_e là khoảng cách từ đầu dầm đến phần tử thứ e .

$$[K]_e = \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 [B] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] + B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \right\} [B] dV_e}_{[\Delta K]_e} \quad (2.208)$$

$[M]_e$ trong trường hợp mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và có tương quan đến mô đun đàn hồi được xác định như phương trình (2.209) khi thay phương trình (2.205) vào phương trình (2.135).

$$\begin{aligned}
 [M]_e = & \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 [N]^T [N] dV_e}_{[M_0]_e} \\
 & + \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 \left[\gamma \left(\frac{\sigma_g}{\sigma_f} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1f)} \right] \right. \\ & \left. + B_{n_1 n_2}^f \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2f)} \right] \right\} + \right. \\ & \left. \sqrt{1-\gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^g y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1g)} \right] \right. \\ & \left. + B_{n_1 n_2}^g \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^g y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2g)} \right] \right\} \right\} [N]^T [N] dV_e}_{[\Delta M]_e}
 \end{aligned} \right. \quad (2.209)
 \end{aligned}$$

Tương tự, khi nghiên cứu tính chất đặc trưng của vật liệu thay đổi ngẫu nhiên ba chiều ma trận độ cứng của phân tử và ma trận khối lượng của phân tử được xác định như các phương trình sau:

$$\begin{aligned}
 [K]_e = & \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 [B] dV_e}_{[K_0]_e} \\
 & + \underbrace{\int_{V_e} [B]^T E_0 \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \end{aligned} \right\} [B] dV_e}_{[\Delta K]_e}
 \end{aligned} \quad (2.210)$$

$$\begin{aligned}
[M]_e &= \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 [N]^T [N] dV_e}_{[M_0]_e} \\
&+ \underbrace{\int_{V_e} \rho_0 \left[\gamma \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_g} \right) \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1f)} \right] \right. \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2f)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e + \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3f)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^f (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^f y_e - \kappa_{3n_3}^f z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4f)} \right] \end{aligned} \right\} + \right. \\ &\left. \sqrt{1-\gamma^2} \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^g y_e + \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1g)} \right] \right. \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2}^g y_e - \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2g)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^g y_e + \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3g)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \cos \left[\kappa_{1n_1}^g (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2}^g y_e - \kappa_{3n_3}^g z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4g)} \right] \end{aligned} \right\} \right] [N]^T [N] dV_e}_{[\Delta M]_e}
\end{aligned} \quad (2.211)$$

Ma trận độ cứng phần tử và ma trận khối lượng phần tử bao gồm hai thành phần. Thành phần thứ nhất được xác định tương tự trường hợp dầm có tính chất vật liệu không thay đổi và thành phần thứ hai là thành phần ngẫu nhiên. Theo FEM, ma trận $[K]$ và ma trận $[M]$ được xây dựng từ $[K]_e$ và ma trận $[M]_e$. Để ý đến các phương trình (2.208) - (2.211) ma trận độ cứng tổng thể được xác định như phương trình (2.212), ma trận khối lượng tổng thể được xác định như phương trình (2.213).

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} \quad (2.212)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta M]_e^{Ext} \quad (2.213)$$

Thay các phương trình (2.212), (2.213) vào phương trình (2.138) với giá trị riêng $\lambda = \omega^2$ thu được phương trình sau:

$$Det \left[\left(\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} \right) - \lambda \left(\sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta M]_e^{Ext} \right) \right] = 0 \quad (2.214)$$

Sử dụng các phương trình (2.204) và (2.205) tạo ra N mẫu của trường ngẫu nhiên E và ρ ngẫu nhiên hai chiều. Xây dựng ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử như các phương trình (2.208) và phương trình (2.209) từ đó có thể xác định được ma trận độ cứng tổng thể và ma trận khối lượng tổng thể của toàn kết cấu như (2.212) và (2.213). Tương tự khi nghiên cứu tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian ba chiều, các trường ngẫu nhiên E và ρ được tạo ra N mẫu từ (2.206) và (2.207). Ma trận độ cứng và ma trận

khối lượng của phân tử có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều được xác định từ (2.210) và (2.211). Sử dụng (2.214) để xác định giá trị riêng ở lần mô phỏng thứ i theo (2.215).

$$\text{Det} \left[\left(\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_{e,i}^{\text{Ext}} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_{e,i}^{\text{Ext}} \right) - \lambda^i \left(\sum_{e=1}^{N_e} [M_0]_{e,i}^{\text{Ext}} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta M]_{e,i}^{\text{Ext}} \right) \right] = 0 \quad (2.215)$$

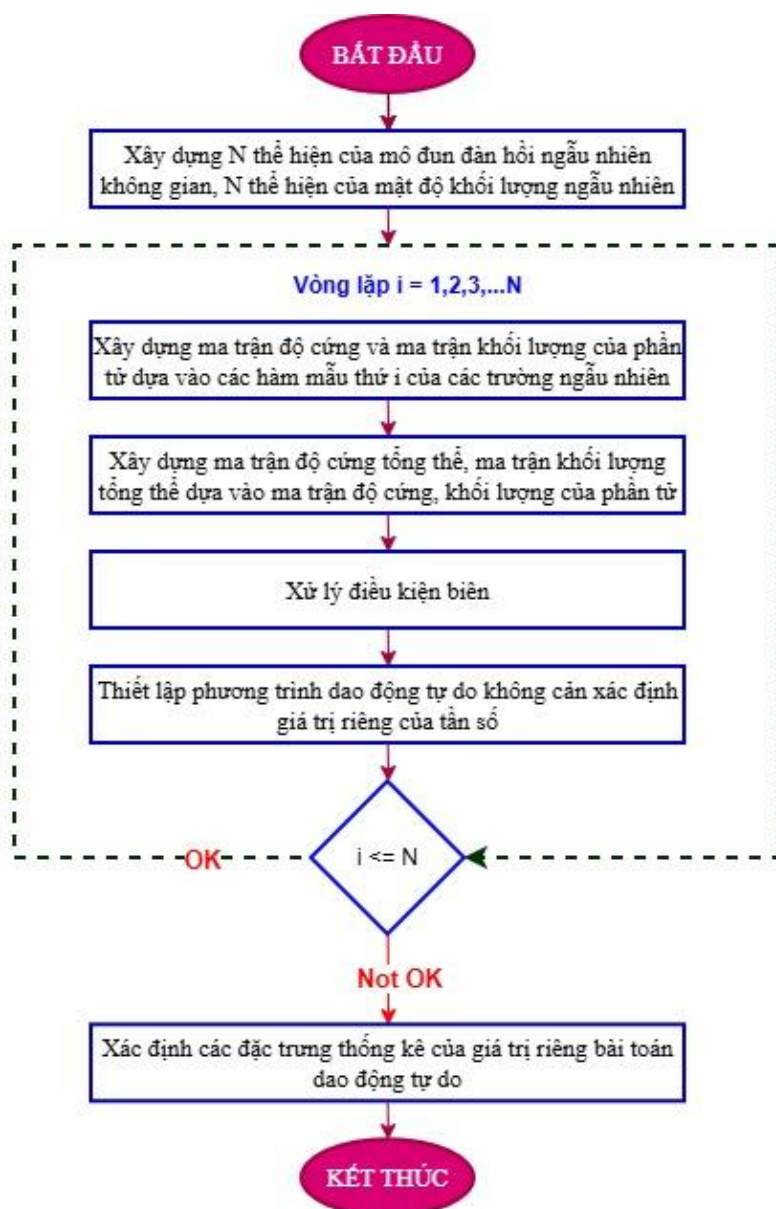
Sử dụng phương trình (2.215) thu được giá trị riêng thứ k ở lần mô phỏng thứ i là λ_k^i . Phân tích trên tập mẫu của trường ngẫu nhiên E và ρ tạo ra thu được N giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Xử lý số liệu thống kê trên tập dữ liệu thu được có thể xác định được giá trị trung bình và phương sai mẫu của giá trị riêng thứ k như các phương trình sau:

$$\bar{\lambda}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_k^i \quad (2.216)$$

$$s_{\lambda_k}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\lambda_k^i - \bar{\lambda}_k \right)^2 \quad (2.217)$$

Trong trường hợp để so sánh mức độ biến thiên tương đối của những tập dữ liệu khác nhau, đặc trưng thống kê được sử dụng trong trường hợp này là COV được xác định như (2.218). Hình 2.11 thể hiện sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên của dầm bằng MCS.

$$\text{COV} = \frac{\sqrt{s_{\lambda_k}^2}}{\bar{\lambda}_k} \quad (2.218)$$



Hình 2.11. Sơ đồ tổng quát phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính bằng MCS

2.6. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ĐÁP ỨNG CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

2.6.1. Đánh giá hiệu ứng thứ cấp và cơ sở áp dụng mô hình dầm phẳng cho bài toán tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Trong nghiên cứu này mô đun đàn hồi được giả định là trường ngẫu nhiên không gian. Sự phân bố ngẫu nhiên không đồng nhất của tính chất vật liệu trên mặt cắt ngang làm cho cấu kiện chỉ chịu tải trọng tác dụng trong một mặt phẳng phát sinh các hiệu ứng ngẫu nhiên thứ cấp như độ võng ngang và góc xoắn. Nội dung này nhằm phân tích định lượng các hiệu ứng thứ cấp sinh ra do tính ngẫu nhiên của vật liệu, qua đó thiết lập cơ sở toán học và cơ học: ứng xử tổng thể của dầm chi phối bởi các biến dạng trong mặt phẳng, và

việc sử dụng mô hình dầm phẳng là một sự đơn giản hóa hợp lý. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều dẫn đến các đại lượng: độ cứng dọc trục, mô men tĩnh đàn hồi, mô men quán tính ly tâm đàn hồi, và độ cứng chống uốn của mặt cắt ngang là các trường ngẫu nhiên được xác định như các phương trình (2.219) - (2.224):

$$D_0(x, \theta) = \int_A E(x, y, z, \theta) dydz \quad (2.219)$$

$$S_y(x, \theta) = \int_A E(x, y, z, \theta) z dydz \quad (2.220)$$

$$S_z(x, \theta) = \int_A E(x, y, z, \theta) y dydz \quad (2.221)$$

$$D_{yz}(x, \theta) = \int_A E(x, y, z, \theta) yz dydz \quad (2.222)$$

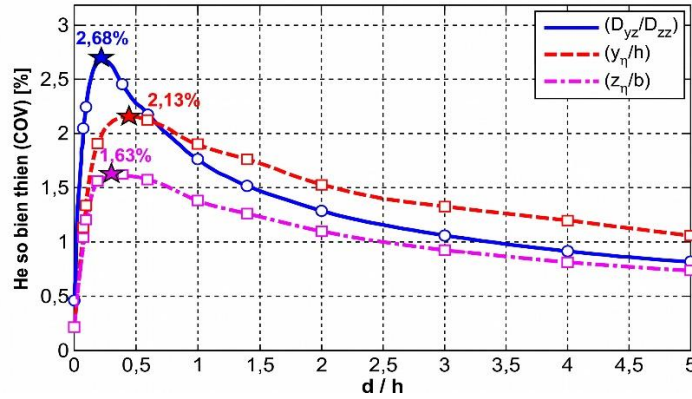
$$D_{zz}(x, \theta) = \int_A y^2 E(x, y, z, \theta) dydz \quad (2.223)$$

$$D_{yy}(x, \theta) = \int_A z^2 E(x, y, z, \theta) dydz \quad (2.224)$$

Trọng tâm đàn hồi của mặt cắt dịch chuyển theo phương đứng (y_n) và phương ngang (z_n):

$$y_n(x, \theta) = \frac{S_z(x, \theta)}{D_0(x, \theta)} \quad (2.225)$$

$$z_n(x, \theta) = \frac{S_y(x, \theta)}{D_0(x, \theta)} \quad (2.226)$$



Hình 2.12. Hệ số biến thiên chuẩn hóa của hiệu ứng thứ cấp

Vì mặt cắt ngang có tính đối xứng hình học và phân bố kỳ vọng của mô đun đàn hồi là đồng nhất, các đại lượng hiệu ứng thứ cấp sinh ra do tính ngẫu nhiên (z_n , y_n , D_{yz}) đều có giá trị kỳ vọng lý thuyết bằng không. Hình 2.12 khảo sát hệ số biến thiên chuẩn hóa theo các kích thước danh nghĩa của mặt cắt (z_n/h , y_n/b , D_{zz}) phụ thuộc vào chiều dài tương quan. Kết quả cho thấy mức độ biến thiên của các hiệu ứng thứ cấp này là nhỏ (dưới 5% đại lượng danh nghĩa), dù trường mô đun đàn hồi có hệ số biến thiên lên tới 20%. Sự biến động nhỏ này minh chứng rằng trong phân tích ngẫu nhiên, ảnh hưởng của biến động thứ cấp hoàn toàn có thể được xem là nguồn ngẫu nhiên nhiễu.

Xét một dầm công-xôn mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều dài nhịp là L chịu lực tập trung P tại đầu tự do. Trong phạm vi nghiên cứu, chỉ xét dầm chịu tải trọng theo phương đứng, dưới ảnh hưởng của hiệu ứng thứ cấp xuất hiện chuyển vị ngang và xoắn ngẫu nhiên. Phương trình vi phân uốn sơ cấp theo phương y như (2.227), phương trình vi phân uốn ngang thứ cấp như (2.228), phương trình vi phân xoắn ngẫu nhiên như (2.229) với độ cứng chống xoắn là một trường ngẫu nhiên như (2.230) trong đó J_0 hằng số xoắn Saint-Venant danh nghĩa của mặt cắt chữ nhật, ν là hệ số Poisson.

$$\frac{d^2 w(x, \theta)}{dx^2} = \frac{P(L-x)D_{yy}(x, \theta)}{D_{zz}(x, \theta)D_{yy}(x, \theta) - D_{yz}^2(x, \theta)} \quad (2.227)$$

$$\frac{d^2 v(x, \theta)}{dx^2} = -\frac{P(L-x)D_{yz}(x, \theta)}{D_{zz}(x, \theta)D_{yy}(x, \theta) - D_{yz}^2(x, \theta)} \quad (2.228)$$

$$\frac{d\phi(x, \theta)}{dx} = \frac{P \times z_n(x, \theta)}{D_t(x, \theta)} \quad (2.229)$$

$$D_t(x, \theta) = \int_A \frac{E(x, y, z, \theta)}{2(1+\nu)} J_0 dydz \quad (2.230)$$

Sử dụng nguyên lý công ảo, xác định các thành phần chuyển vị tại đầu tự do của dầm được xác định như các phương trình sau:

$$w(L, \theta) = \int_0^L \frac{P(L-x)^2 D_{yy}(x, \theta)}{D_{zz}(x, \theta)D_{yy}(x, \theta) - D_{yz}^2(x, \theta)} dx \quad (2.231)$$

$$v(L, \theta) = -\int_0^L \frac{P(L-x)^2 D_{yz}(x, \theta)}{D_{zz}(x, \theta)D_{yy}(x, \theta) - D_{yz}^2(x, \theta)} dx \quad (2.232)$$

$$\phi(L, \theta) = \int_0^L \frac{P \times z_n(x, \theta)}{D_t(x, \theta)} dx \quad (2.233)$$

Xét dầm công-xôn có các kích thước hình học: $L = 5 \text{ m}$, $h = 0,4 \text{ m}$, $b = 0,25 \text{ m}$ chịu tải trọng theo phương thẳng đứng tại đầu tự do $P = 50 \text{ kN}$. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều với giá trị kỳ vọng $E_0 = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\text{COV}_E = 20\%$. Kết quả thống kê thu được từ mô phỏng được tổng hợp chi tiết trong Bảng 2.1 đến Bảng 2.3. Các số liệu chỉ ra rằng, khi sử dụng mô hình dầm không gian xét đến đầy đủ các hiệu ứng thứ cấp, các đại lượng chuyển vị phái sinh (bao gồm độ võng ngang và góc xoắn) có hệ số biến thiên của chuyển vị ngang (dưới 2%) so với chuyển vị đứng chủ đạo. Đồng thời, khi đối chiếu thành phần uốn chính, độ sai lệch giữa kết quả của mô hình dầm phẳng thu gọn và mô hình dầm không gian nhỏ hơn 5%. Điều này cho thấy sử dụng phần tử dầm phẳng trong bài toán xét đến

tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian là chấp nhận được trong phạm vi nghiên cứu của luận án.

Bảng 2.1. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và không gian ($d = 0,01L$)

Chuyển vị	Kỳ vọng			Độ lệch chuẩn		
	Dầm phẳng	Dầm không gian	Tỉ lệ (%)	Dầm phẳng	Dầm không gian	Tỉ lệ (%)
Đứng (mm),	52,3148	52,3370	0,0426	0,5849	0,5857	0,1365
Ngang (mm)	-	0,002886	-	-	0,5827	COV = 1,113
Góc xoắn ($độ$)	-	0,000003	-	-	0,00043	-

Bảng 2.2. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và không gian ($d = 0,1L$)

Chuyển vị	Kỳ vọng			Độ lệch chuẩn		
	Dầm phẳng	Dầm không gian	Tỉ lệ (%)	Dầm phẳng	Dầm không gian	Tỉ lệ (%)
Đứng (mm),	53,6461	53,6608	0,0274	4,9118	4,9157	0,0793
Ngang (mm)	-	0,003815	-	-	0,9676	COV = 1,803
Góc xoắn ($độ$)	-	0,000015	-	-	0,00172	-

Bảng 2.3. So sánh các thành phần chuyển vị khi phân tích bằng mô hình dầm phẳng và không gian ($d = L$)

Chuyển vị	Kỳ vọng			Độ lệch chuẩn		
	Dầm phẳng	Dầm không gian	Tỉ lệ (%)	Dầm phẳng	Dầm không gian	Tỉ lệ (%)
Đứng (mm),	54,4259	54,4262	0,0005	11,0210	11,0212	0,0018
Ngang (mm)	-	0,002153	-	-	0,2162	COV = 0,3972
Góc xoắn ($độ$)	-	0,000004	-	-	0,00149	

2.6.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên đáp ứng của dầm theo mật độ lưới chia phần tử

Xét dầm giản đơn có chiều dài nhịp $L = 5\text{ m}$, mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao $h = 0,4\text{ m}$, bề rộng $b = 0,25\text{ m}$. Dầm chịu tải trọng phân bố đều $q = 10\text{ kN/m}$. Dầm E và ρ thay đổi ngẫu nhiên không gian có hàm tự hiệp phương sai như các phương trình (2.234) - (2.237). Với giá trị kỳ vọng của E và ρ lần lượt: $E_0 = 30 \times 10^9\text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 2400$

kg/m^3 . Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên không gian $\sigma_f = \sigma_g = 0,05$. Các chiều dài tương quan theo các trục trong không gian $d_x = d_y = d_z = d$, thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$.

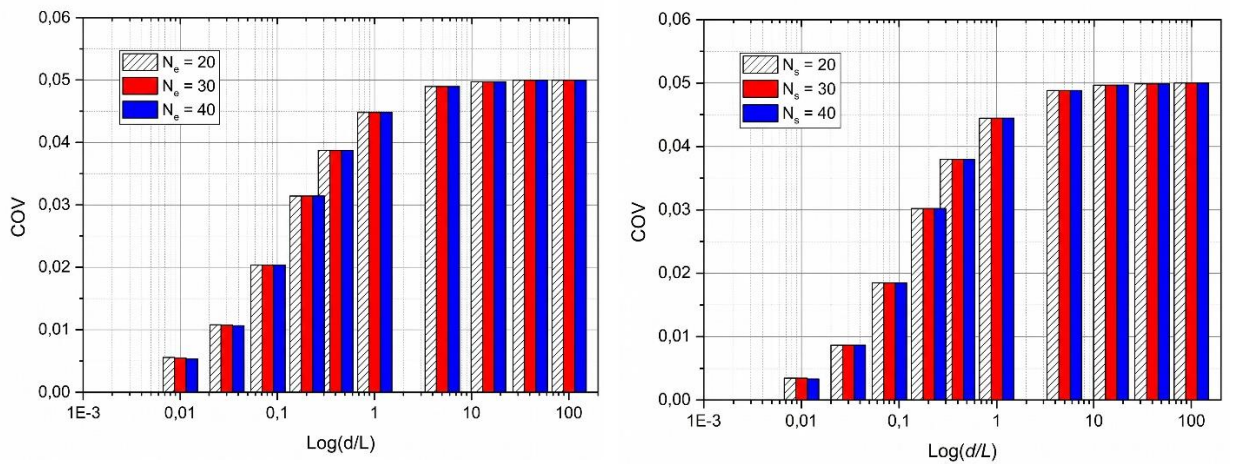
$$C_{EE}(\xi_1, \xi_2) = E_0^2 \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (2.234)$$

$$C_{EE}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E_0^2 \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (2.235)$$

$$C_{\rho\rho}(\xi_1, \xi_2) = \rho_0^2 \sigma_g^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (2.236)$$

$$C_{\rho\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \rho_0^2 \sigma_g^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (2.237)$$

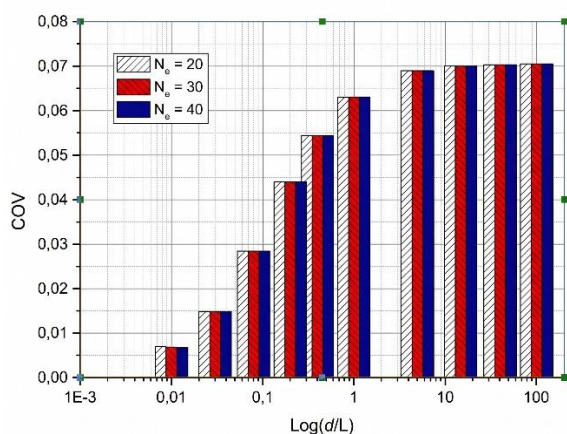
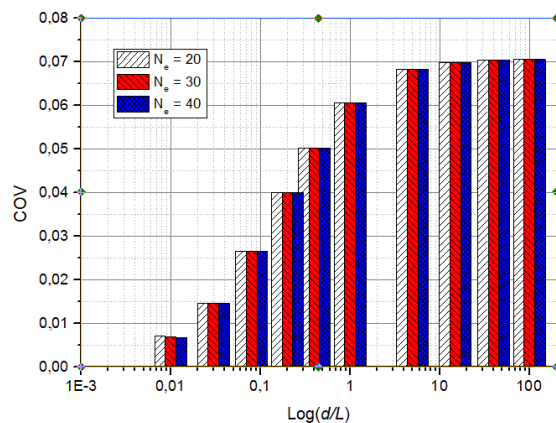
Sử dụng phương pháp SFEM được phát triển trong Chương II, COV của chuyển vị tại vị trí giữa nhịp được xác định cho hai trường hợp: mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều. Bên cạnh đó, các giá trị riêng của dầm giản đơn có E và ρ ngẫu nhiên không gian cũng được phân tích. Các tính toán được thực hiện với số phần tử: $N_e = 20$, $N_e = 30$ và $N_e = 40$. Kết quả thể hiện trên Hình 2.13 cho thấy giá trị COV của chuyển vị hội tụ khi kích thước lưới đủ mịn. Đồng thời Hình 2.14 và Hình 2.15 thể hiện sự hội tụ của COV giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian. Cụ thể, sự sai khác giữa các lưới gần như không đáng kể khi $N_e \geq 40$, cho thấy kết quả phân tích không còn phụ thuộc vào lưới chia phần tử. Điều này chứng tỏ mô hình SFEM đạt được độ chính xác ổn định, và lưới $N_e = 40$ có thể sử dụng cho các phân tích tiếp theo nhằm tiết kiệm chi phí tính toán.



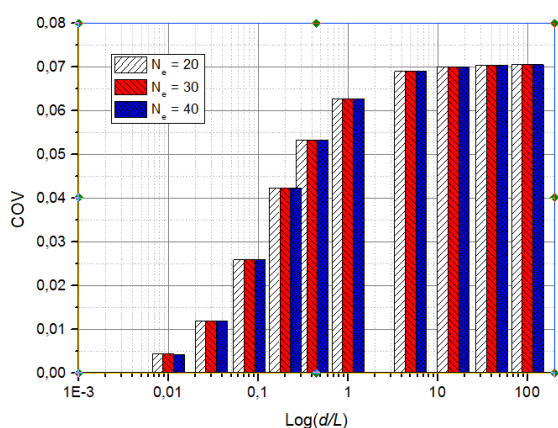
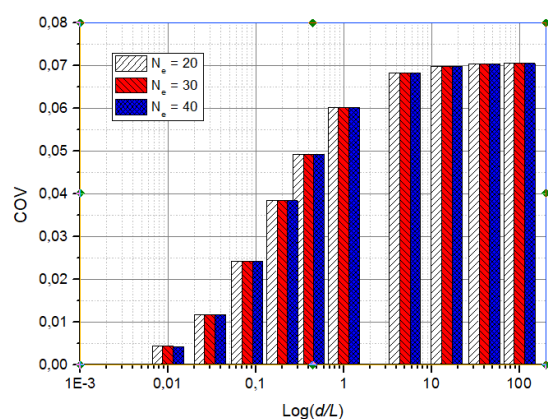
a. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

b. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Hình 2.13. Kiểm chứng sự hội tụ của COV chuyển vị theo lưới chia phần tử

a. Giá trị riêng thứ nhất (λ_1)b. Giá trị riêng thứ hai (λ_2)

Hình 2.14. Kiểm chứng sự hội tụ của COV của giá trị riêng trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

a. λ_1 b. λ_2

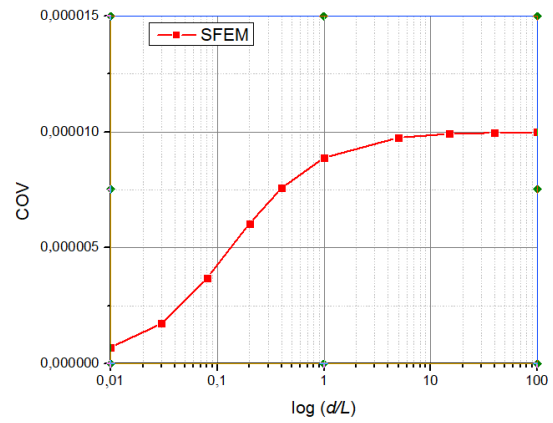
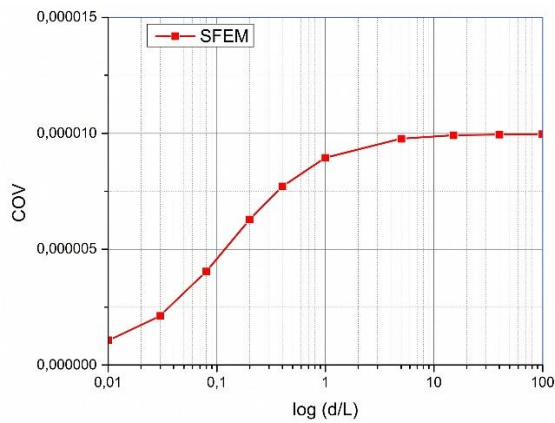
Hình 2.15. Kiểm chứng sự hội tụ của COV của giá trị riêng trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

2.6.3. Kiểm tra mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên

Theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên, khi mức độ biến động của các tham số đầu vào nhỏ, bài toán ngẫu nhiên sẽ tiến gần đến bài toán tất định. Khi đó, thành phần ngẫu nhiên của kết cấu được dự đoán hội tụ về giá trị vô cùng nhỏ. Để kiểm chứng nhận định này, độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên đầu vào được chọn là $\sigma_f = \sigma_g = 0,00001$. Phương pháp SFEM được phát triển trong Chương II được sử dụng để phân tích COV của chuyển vị và các giá trị riêng.

Kết quả phân tích được thể hiện trong Hình 2.16 đến Hình 2.18 cho thấy COV của chuyển vị và COV của giá trị riêng đều biến thiên rất nhỏ khi độ ngẫu nhiên của các tham

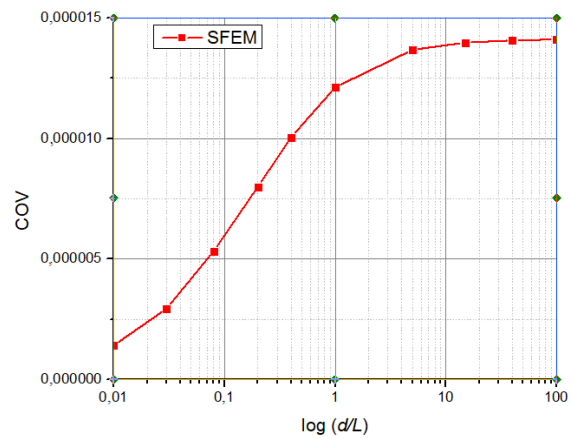
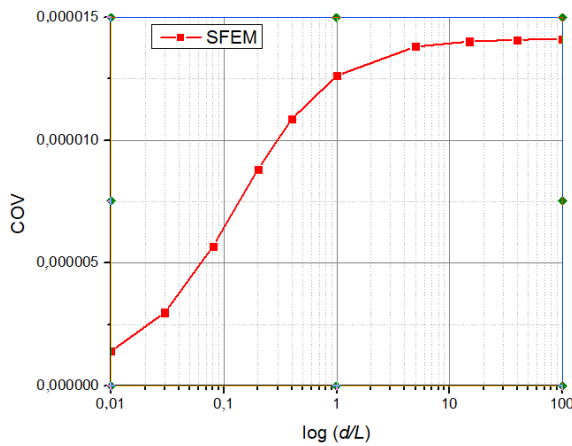
số đầu vào giảm. Nói cách khác, đáp ứng của dầm gần như mang tính tất định. Điều này chứng tỏ phương pháp SFEM đảm bảo được tính chính xác và phù hợp khi áp dụng phân tích ngẫu nhiên.



a. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

b. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

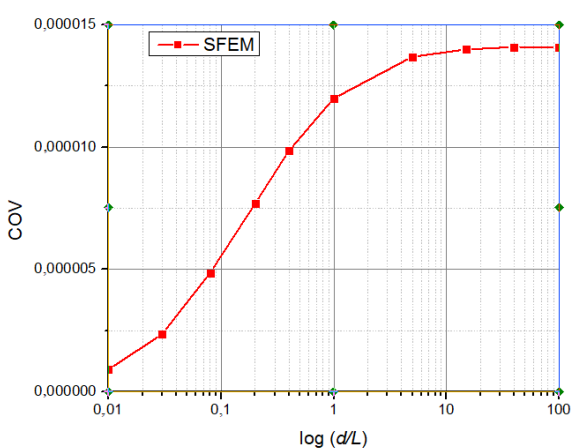
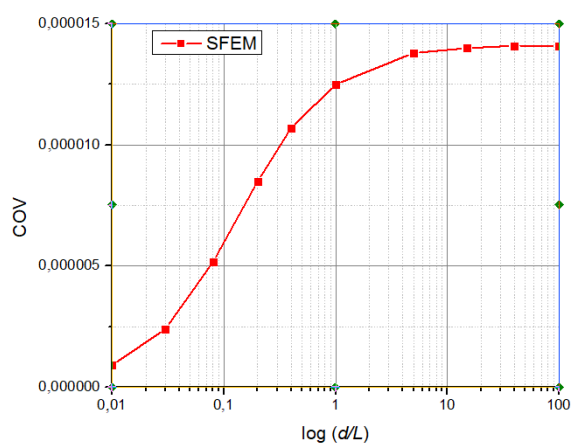
Hình 2.16. COV của chuyển vị khi yếu tố ngẫu nhiên đầu vào có độ lệch nhỏ



a. λ_1

b. λ_2

Hình 2.17. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều



a. λ_1

b. λ_2

Hình 2.18. COV của giá trị riêng với tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

2.6.4. Kiểm chứng mô hình phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố

2.6.4.1. Kiểm chứng bài toán phân tích ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Trong tài liệu [16], Adhikari và Mukherjee đã đề xuất một phương pháp phân tích dựa trên cách tiếp cận của Castigliano thay cho công thức biến phân truyền thống, nhằm xác định ma trận độ cứng của phần tử dầm có các tham số tính chất của vật liệu bất định biến đổi ngẫu nhiên theo không gian một chiều kết hợp với mô phỏng MCS để phân tích tĩnh ngẫu nhiên. Dựa trên kết quả được công bố trong nghiên cứu này, phương sai của chuyển vị được xác định bằng SFEM được so sánh trong điều kiện tương tự. Cụ thể, chiều dài tương quan theo trục x được chọn bằng $L/10$ (giá trị sử dụng trong tài liệu [16]), trong khi chiều dài tương quan theo các phương y và z được giả thiết rất lớn ($100L$) để mô phỏng trường ngẫu nhiên gần như chỉ biến thiên theo một chiều không gian. Theo lý thuyết trường ngẫu nhiên, khi chiều dài tương quan theo một phương đủ lớn so với kích thước hình học của miền khảo sát, trường ngẫu nhiên được xem là gần như đồng nhất theo phương đó, tức là không có sự biến thiên ngẫu nhiên đáng kể trong hướng có chiều dài tương quan rất lớn [51], [52]. Điều này cho phép thực hiện so sánh trực tiếp với bài toán một chiều được trình bày trong tài liệu [16] của Adhikari và Mukherjee, trong khi vẫn duy trì khung mô hình trường ngẫu nhiên không gian tổng quát được phát triển trong luận án.

Xét dầm một đầu ngàm, một đầu tự do có các kích thước hình học: chiều dài nhịp $L = 1\text{ m}$, $h = 0,03\text{ m}$, $b = 0,003\text{ m}$. Mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên: một chiều, hai chiều, ba chiều với giá trị kỳ vọng $E_0 = 69 \times 10^9\text{ N/m}^2$. Dầm chịu tác dụng của lực tập trung tại đầu tự do. Trường ngẫu nhiên được xem xét là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng. Sử dụng phương pháp SFEM được phát triển nghiên cứu trong luận án này để phân tích kỳ vọng và độ lệch chuẩn của chuyển vị chuẩn hóa (chuyển vị do mô đun đàn hồi ngẫu nhiên chia cho chuyển vị của bài toán tất định) tại đầu tự do của dầm công-xôn đối chiếu với kết quả phân tích được công bố trong tài liệu [16] được thể hiện trong Bảng 2.4 và Bảng 2.5.

Bảng 2.4. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác

Mô đun đàn hồi	$\sigma_f = 0,05$	$\sigma_f = 0,10$	$\sigma_f = 0,15$	$\sigma_f = 0,20$
NN một chiều ($d_x = L/10$), [16]	1,0024	1,0049	1,0073	1,0097
NN hai chiều ($d_x = L/10, d_y = 100L$) [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
NN ba chiều ($d_x = L/10, d_y = d_z = 100L$), [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Sai số (%)	0,24	0,49	0,73	0,97

Bảng 2.5. So sánh độ lệch chuẩn của chuyển vị chuẩn hóa tại đầu tự do bằng SFEM với công bố [16] phương pháp ma trận độ cứng chính xác

Mô đun đàn hồi	$\sigma_f = 0,05$	$\sigma_f = 0,10$	$\sigma_f = 0,15$	$\sigma_f = 0,20$
NN một chiều ($d_x = L/10$) [16]	0,0268	0,0535	0,0803	0,1071
NN hai chiều ($d_x = L/10, d_y = 100L$) [Luận án]	0,0265	0,0531	0,0797	0,1063
NN ba chiều ($d_x = L/10, d_y = d_z = 100L$) [Luận án]	0,0265	0,0531	0,0797	0,1063
Sai số (%)	1,1194	0,7477	0,7472	0,7470

Trong nghiên cứu này chuyển vị của dầm được xấp xỉ dưới dạng chuỗi Taylor bậc nhất của các biến ngẫu nhiên được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên có giá trị kỳ vọng bằng không. Do đó giá trị kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa được xác định bằng SFEM sẽ bằng 1 không phụ thuộc vào chiều dài tương quan trong không gian cũng như độ lệch chuẩn của mô đun đàn hồi. Kết quả so sánh cho thấy phương pháp SFEM được đề xuất phù hợp và đảm bảo tính chính xác khi phân tích ngẫu nhiên dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian.

2.6.4.2. Kiểm chứng bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

Trong tài liệu [63] Hosseini và Khadem đã nghiên cứu giá trị riêng thứ nhất của bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm công-xôn quay quanh một trục với tốc độ quay là biến ngẫu nhiên, các tính chất vật liệu và kích thước hình học ngẫu nhiên một chiều. Nhóm tác giả sử dụng phương pháp rời rạc điểm và rời rạc hóa trung bình để biểu diễn trường ngẫu nhiên kết hợp với nhiễu bậc hai để phân tích. Trong luận án này, người viết sử dụng kết quả trong tài liệu [63] tương ứng với trường hợp tốc độ quay bằng

không tức là đảm bảo yên để đối chiếu kết quả xác định độ lớn của COV của trị riêng thứ nhất được xác định bằng SFEM.

Xét dầm công-xôn có chiều dài nhịp $L = 0,8 \text{ m}$, kích thước mặt cắt ngang $h = 0,04 \text{ m}$, $b = 0,015 \text{ m}$. E và ρ là trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng, có giá trị kỳ vọng $E_0 = 165,44 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 7830 \text{ kg/m}^3$. Trường ngẫu nhiên E và ρ có tương quan với nhau thông qua hệ số tương quan γ , độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên $\sigma_f = \sigma_g = 0,1$.

Trong tài liệu [63] trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu là trường ngẫu nhiên một chiều với chiều dài tương quan $d_x = L$ và hai trường hợp tương quan được xem xét: $\gamma = 0$, $\gamma = 1$. Kết quả này được dùng để kiểm chứng cho bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính cho kết cấu dầm với tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian (2D, 3D) được phân tích bằng SFEM đề xuất trong luận án này. Trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều các thông số về chiều dài tương quan và hệ số tương quan được chọn: $d_x = L$, $d_y = 100L$, $\gamma = 0$, $\gamma = 1$. Trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều các thông số được chọn: $d_x = L$, $d_y = d_z = 100L$, $\gamma = 0$, $\gamma = 1$. Kết quả so sánh COV của giá trị riêng thứ nhất được xác định bằng SFEM đề xuất trong luận án và kết quả trong công trình đã được xuất bản [63] được thể hiện trong Bảng 2.6 với sai số được ghi nhận dưới 5%. Điều này khẳng định tính chính xác cũng như sự phù hợp của phương pháp được đề xuất. COV của giá trị riêng thứ nhất khi tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều có độ lớn bằng nhau, hiện tượng này được giải thích bởi chiều dài tương quan theo trục x được lấy bằng nhau còn chiều dài tương quan theo các trục còn lại có giá trị rất lớn. Chính điều này làm cho tính ngẫu nhiên theo các trục y và z của tính chất vật liệu gần như đồng nhất, đáp ứng của trường ngẫu nhiên không gian giống trường ngẫu nhiên một chiều, hoàn toàn phù hợp với bản chất vật lý của bài toán.

Bảng 2.6. So sánh COV của giá trị riêng thứ nhất bằng SFEM với công bố [63]

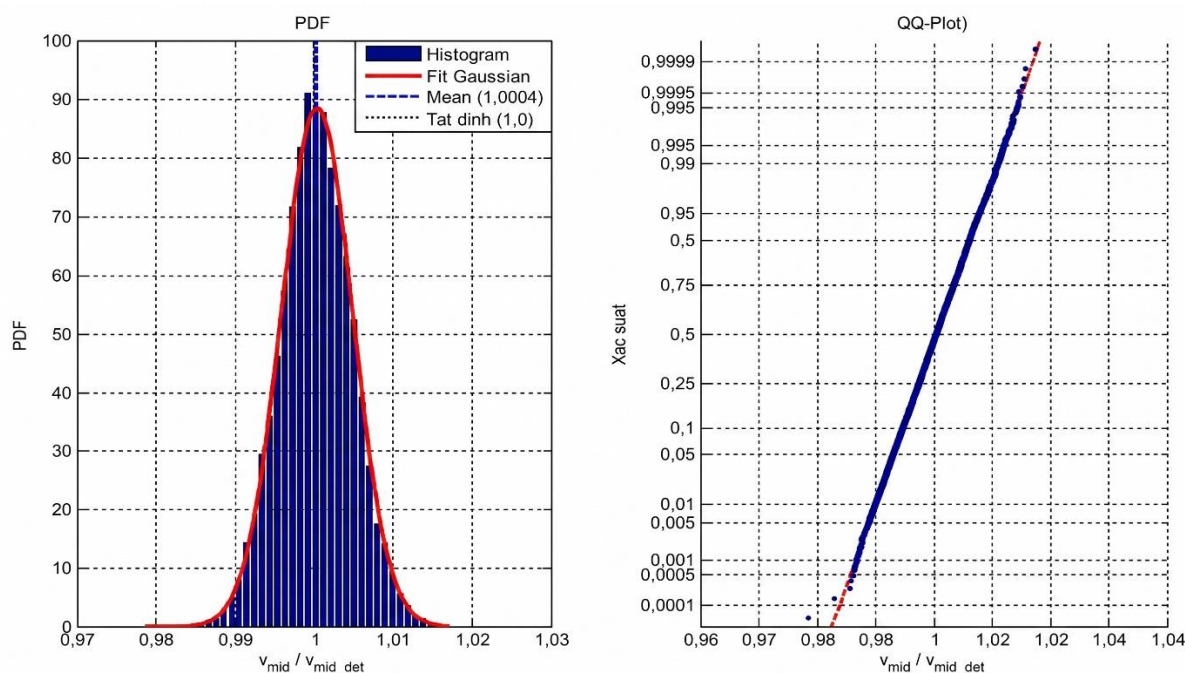
Mô đun đàn hồi	$\gamma = 0$	$\gamma = 1,0$
NN một chiều ($d_x = L$) [63]	0,1300	0,0745
NN hai chiều ($d_x = L$, $d_y = 100L$) [Luận án]	0,1305	0,0772
NN ba chiều ($d_x = L$, $d_y = d_z = 100L$) [Luận án]	0,1305	0,0772
Sai số (%)	0,3846	3,6242

2.6.5. So sánh kết quả phân tích đáp ứng của dầm bằng phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo

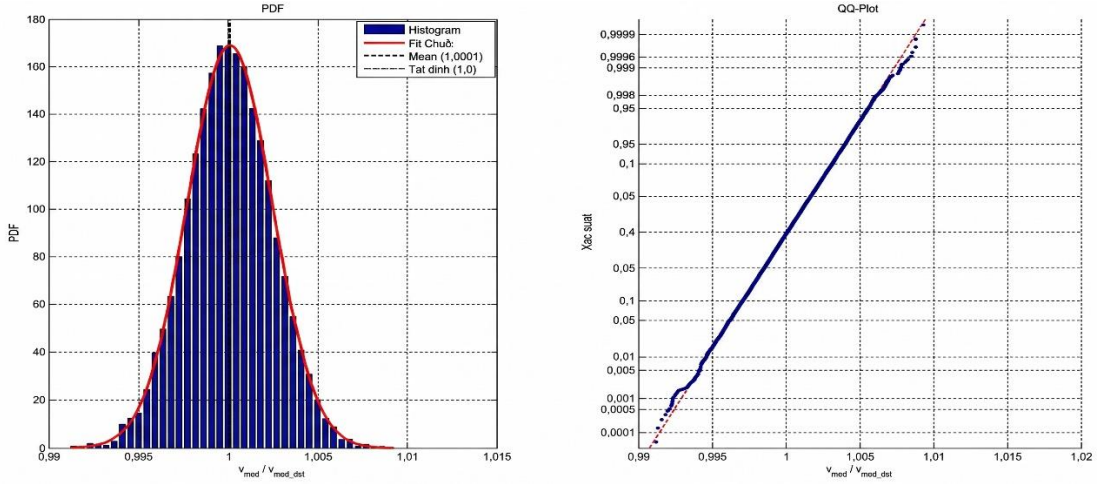
Đối với bài toán phân tích ngẫu nhiên để kiểm tra kết quả phân tích trong hầu hết tất cả các công bố đều sử dụng phương pháp thống kê như là một phương pháp kiểm chứng

độc lập. Bản chất của phương pháp này dựa trên nguyên lý thống kê: khi số lượng mẫu mô phỏng đủ lớn, các đặc trưng thống kê ước lượng (kỳ vọng, phương sai, COV) sẽ hội tụ về giá trị thực, nhờ đó sai số có thể được kiểm soát và giảm thiểu đáng kể. Cụ thể, các thể hiện (realizations) của trường ngẫu nhiên đầu vào được sinh ra bằng phương pháp biểu diễn phổ, bảo đảm đúng hàm tương quan và các đặc trưng thống kê mong muốn. Sau đó, mỗi thể hiện được phân tích bằng FEM tiêu chuẩn nhằm xác định các đại lượng đáp ứng của dầm, bao gồm chuyển vị và giá trị riêng. Tập hợp kết quả thu được từ các mẫu mô phỏng được xử lý thống kê làm chuẩn tham chiếu nhằm đánh giá và kiểm chứng tính chính xác, khả năng hội tụ cũng như độ tin cậy của phương pháp SFEM được đề xuất.

Trong nghiên cứu này, sử dụng phương pháp phổ tạo ra $N = 10.000$ mẫu của E và ρ ngẫu nhiên không gian kết hợp với FEM tiêu chuẩn thu được đáp ứng ngẫu nhiên của dầm. Các giá trị độ lệch chuẩn của hai trường ngẫu nhiên: $\sigma_f = \sigma_g = 0,05$. Hình 2.19 và Hình 2.20 minh họa biểu đồ tần suất, biểu đồ Q-Q của chuyển vị chuẩn hóa tại giữa nhịp của dầm giản đơn tương ứng với trường hợp E ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều. Quan sát biểu đồ Q-Q của chuyển vị cho thấy phân vị mẫu phù hợp tương đối tốt với phân vị lý thuyết của phân phối chuẩn, mặc dù tồn tại một số sai lệch nhỏ tại các đầu mút, xu hướng tổng thể của chuyển vị vẫn duy trì tuyến tính. Với độ lệch và độ nhọn xấp xỉ độ lệch và độ nhọn của phân phối chuẩn. Do đó chuyển vị tại giữa nhịp được xem xấp xỉ phân phối Gaussian. Giá trị kỳ vọng và COV của chuyển vị chuẩn hóa được xác định bằng SFEM sai lệch nhỏ với MCS được thể hiện từ Hình D.1 đến Hình D.4 trong phụ lục D.

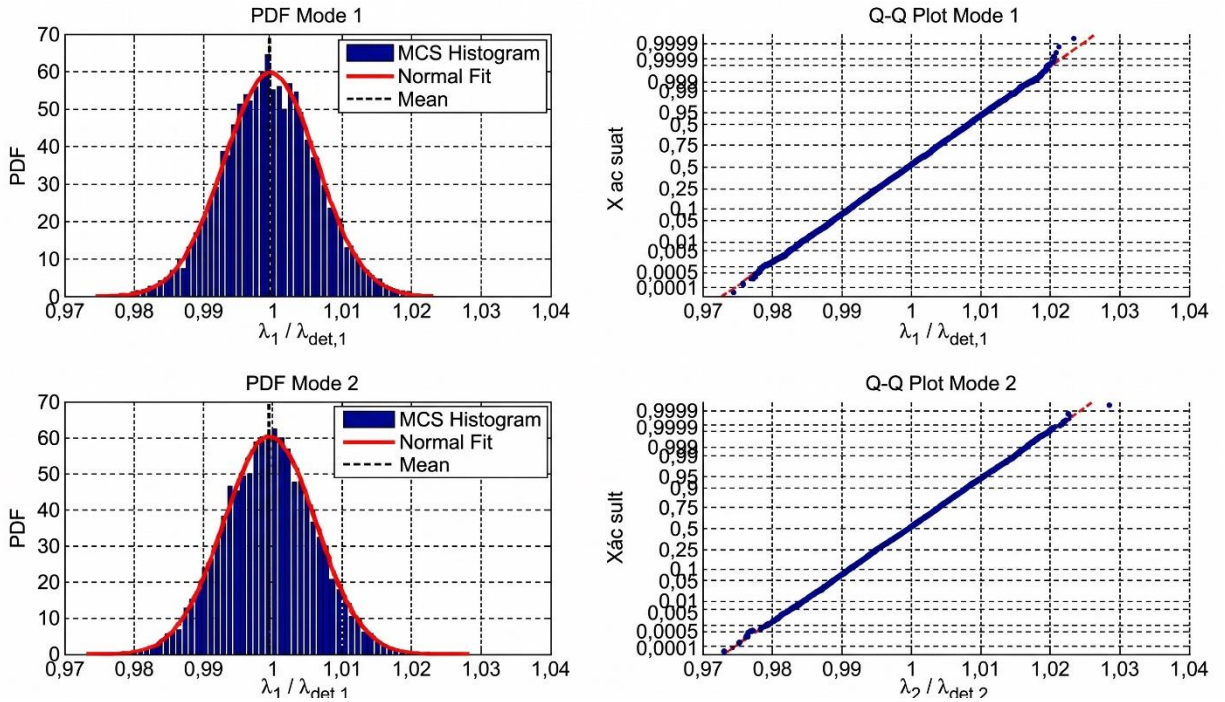


Hình 2.19. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của chuyển vị chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên hai chiều ($d = 0,01L$)

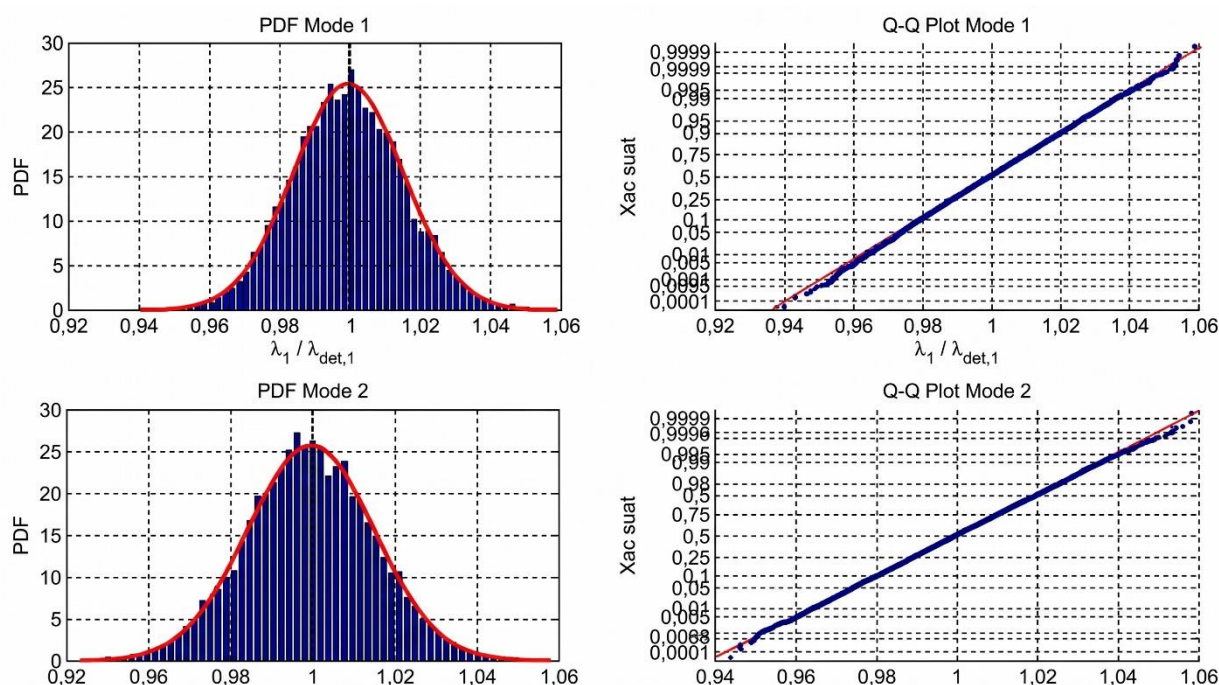


Hình 2.20. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của chuyển vị chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều ($d = 0,01L$)

Hình 2.21 và Hình 2.22 minh họa biểu đồ tần suất, biểu đồ Q-Q của giá trị riêng chuẩn hóa. Biểu đồ Q-Q của giá trị riêng thu được phân bố gần tuyến tính theo đường chuẩn lý thuyết, sai lệch nhỏ và không xuất hiện cong rõ rệt tại hai đầu mút. Thêm vào đó, độ lệch và độ nhọn gần với độ lệch và độ nhọn của phân phối chuẩn. Do đó giá trị riêng trong bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm xấp xỉ phân phối chuẩn. Giá trị kỳ vọng và COV của trị riêng chuẩn hóa, được xác định bằng MCS và SFEM ứng với các mức độ lệch chuẩn khác nhau của trường ngẫu nhiên không gian, chỉ sai khác nhỏ; các kết quả tương ứng được trình bày trong Hình D.5 đến Hình D.16 trong phụ lục D.

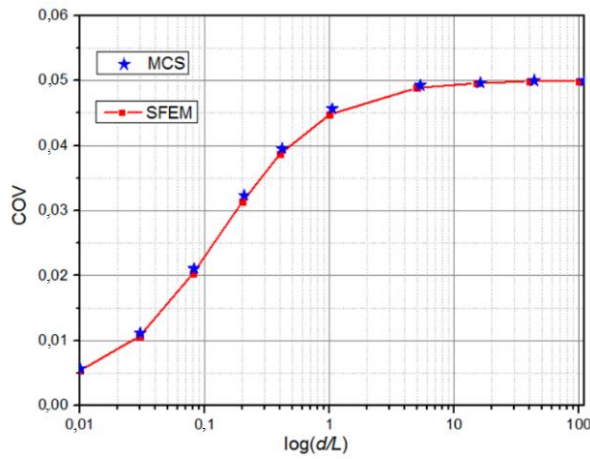


Hình 2.21. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của giá trị riêng chuẩn hóa trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($d = 0,01L$, $\gamma = 0$)

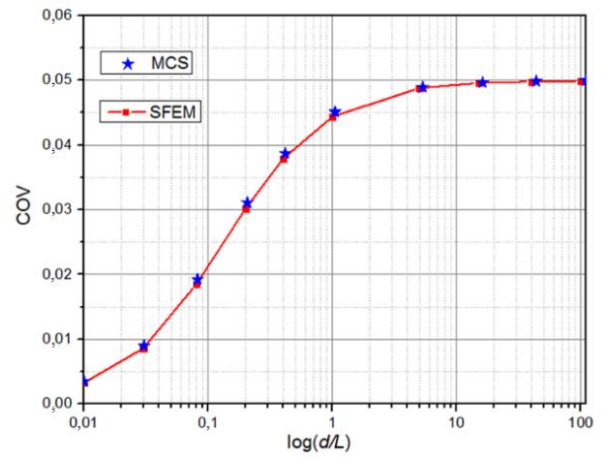


Hình 2.22. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của giá trị riêng chuẩn hóa trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d = 0,01L$, $\gamma = 0$)

Xử lý thống kê trên tập hợp dữ liệu thu được từ đáp ứng ngẫu nhiên của dầm có thể thiết lập được COV của chuyển vị và giá trị riêng. Đồng thời, các đại lượng thống kê này cũng được xác định bằng SFEM được phát triển trong luận án. Kết quả so sánh giữa hai phương pháp độc lập được trình bày trong Hình 2.23 đối với bài toán ứng xử tĩnh ngẫu nhiên. Tương tự, Hình 2.24 đến Hình 2.26 thể hiện so sánh COV của giá trị riêng của dầm trong trường hợp tính chất đặc trưng của vật liệu ngẫu nhiên hai chiều, trong khi Hình 2.27 đến Hình 2.29 trình bày kết quả tương ứng trong trường hợp tính chất ngẫu nhiên ba chiều. Các phân tích được thực hiện với chiều dài tương quan theo các trục không gian bằng nhau và thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$, nhằm khảo sát ảnh hưởng của đặc trưng tương quan không gian đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm. Kết quả phân tích chỉ ra COV được xác định bằng SFEM và MCS sai khác được ghi nhận nhỏ hơn 5%, chứng tỏ rằng phương pháp SFEM được phát triển trong luận án đạt được độ chính xác và có phù hợp khi phân tích ứng xử tĩnh và bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của kết cấu dầm trong trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên.

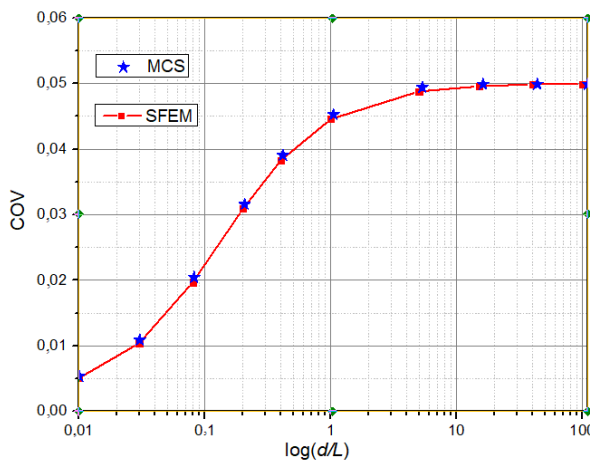


a, Ngẫu nhiên hai chiều

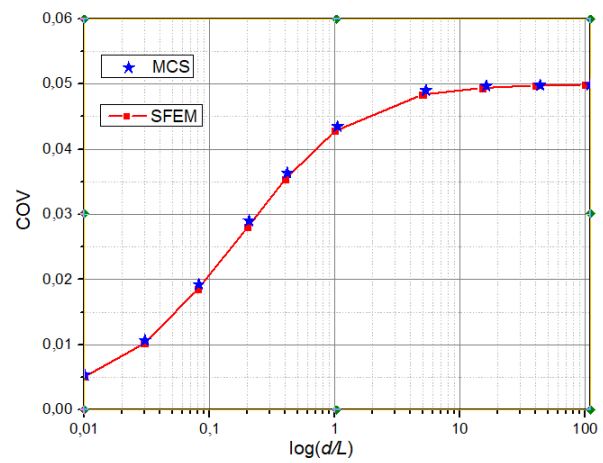


b, Ngẫu nhiên ba chiều

Hình 2.23. So sánh COV của chuyển vị xác định bằng SFEM và MCS

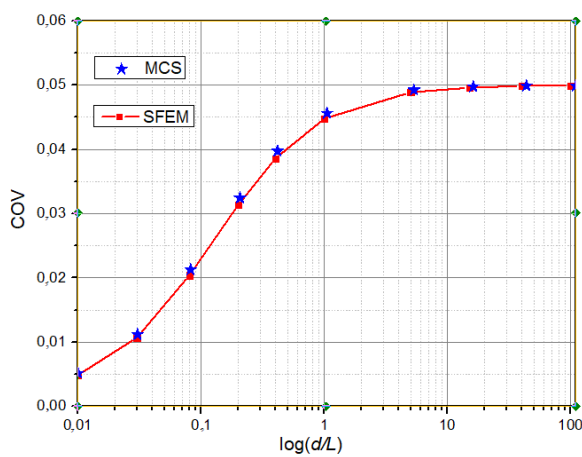


a. λ_1

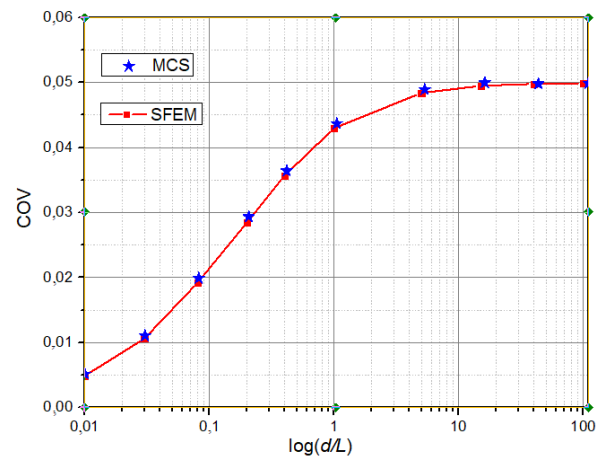


b. λ_2

Hình 2.24. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều xác định bằng SFEM và MCS

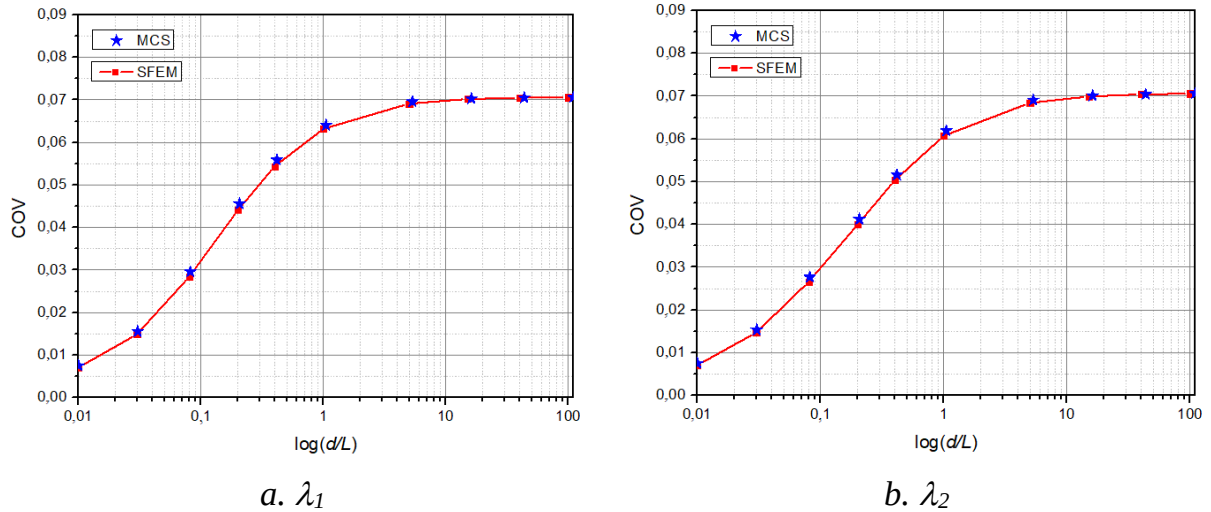


a. λ_1

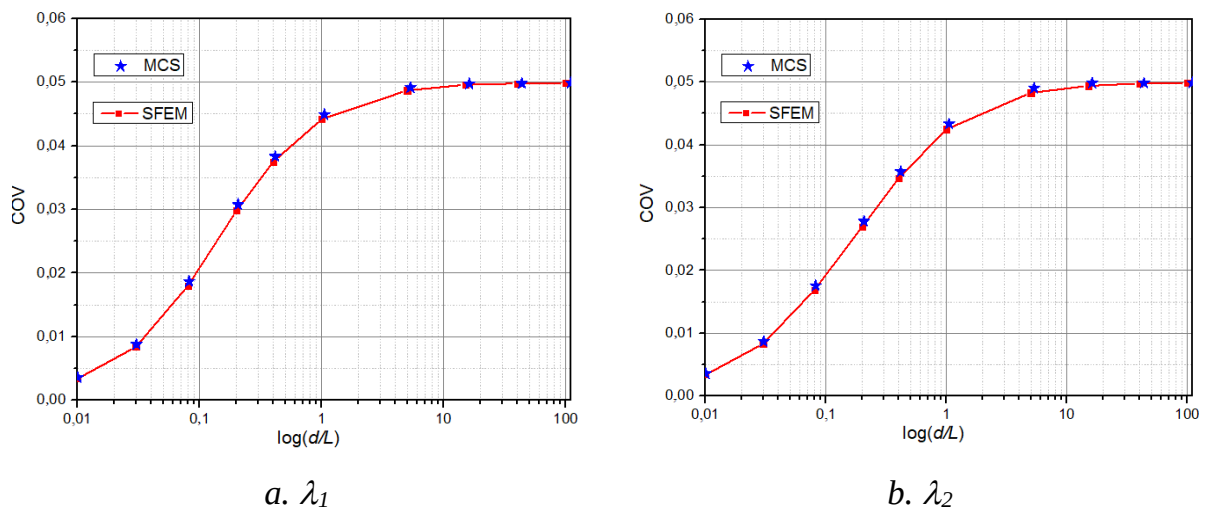


b. λ_2

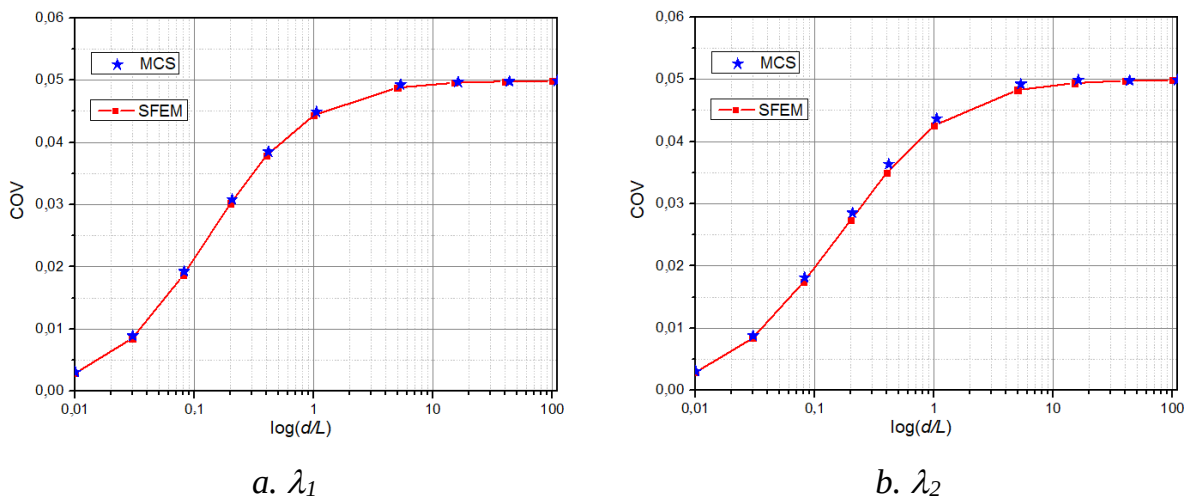
Hình 2.25. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS



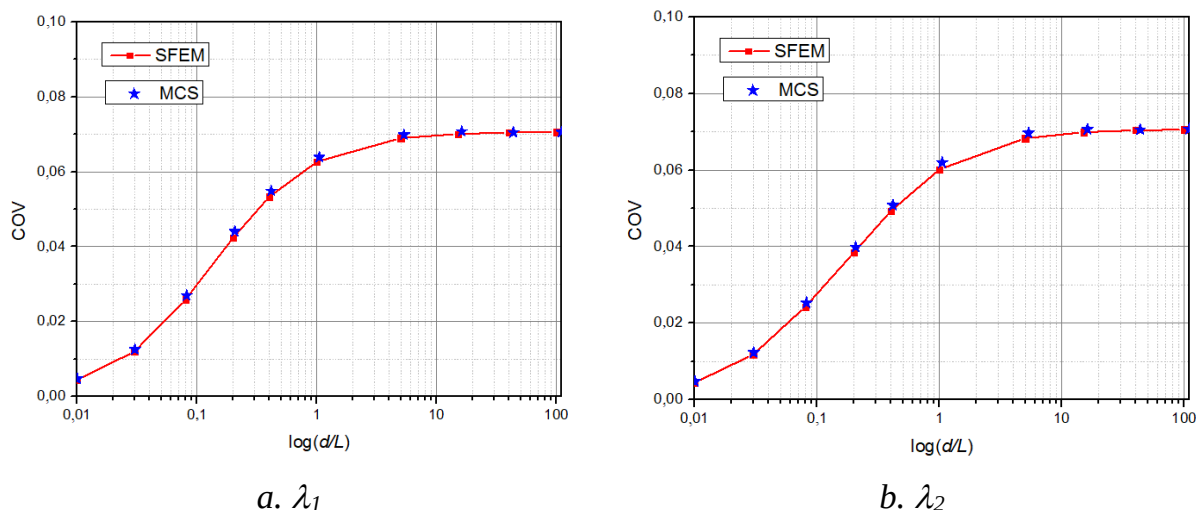
Hình 2.26. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$)



Hình 2.27. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS



Hình 2.28. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS



Hình 2.29. So sánh COV của giá trị riêng của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều được xác định bằng SFEM và MCS ($\gamma = 0$)

2.7. KẾT LUẬN CHƯƠNG II

Phương pháp SFEM đã được thiết lập thành công trong Chương II nhằm phân tích ứng xử ngẫu nhiên của kết cấu dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian. Các kết quả nghiên cứu cốt lõi bao gồm:

Về xây dựng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên:

- ✓ **Kỹ thuật tích phân trọng số:** Đã được phát triển để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên không gian thành tập hợp các biến ngẫu nhiên cơ bản. Cách tiếp cận này cho phép thiết lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng ngẫu nhiên của phần tử dưới dạng tổng của thành phần tất định (theo giá trị kỳ vọng) và thành phần ngẫu nhiên (phụ thuộc vào biến động ngẫu nhiên của tính chất vật liệu).
- ✓ **Phương pháp nhiễu loạn:** Đã được phát triển để lan truyền yếu tố ngẫu nhiên từ tính chất vật liệu vào đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cho phép xác định trực tiếp chuỗi xấp xỉ bậc nhất của các đại lượng đầu ra ngẫu nhiên (chuyển vị, giá trị riêng) mà không cần thực hiện mô phỏng lặp lại nhiều lần.

Về khả năng giải quyết bài toán: Dựa trên mô hình SFEM được đề xuất, hai bài toán cơ bản của kết cấu dầm có vật liệu phân bố ngẫu nhiên không gian đã được giải quyết trọn vẹn, bao gồm:

- ✓ **Bài toán phân tích tĩnh ngẫu nhiên:** Xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê (kỳ vọng, phương sai, COV) của chuyển vị.
- ✓ **Bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên:** Xác định các đặc trưng thống kê của giá trị riêng

- ✓ **Về kiểm chứng độ tin cậy và tính chính xác:** Mô hình SFEM được nghiên cứu phát triển đã được kiểm định nghiêm ngặt qua các tiêu chí cốt lõi, khẳng định tính đúng đắn và khả năng ứng dụng của phương pháp:
- ✓ **Sự hội tụ của lời giải số:** Kết quả phân tích cho thấy hệ số biến thiên (COV) của đáp ứng ngẫu nhiên hội tụ ổn định và không phụ thuộc vào mật độ lưới chia khi số lượng phần tử đủ lớn.
- ✓ **Tính nhất quán với lý thuyết tính toán ngẫu nhiên:** Khi độ biến động của tính chất vật liệu đầu vào tiến về không, đáp ứng ngẫu nhiên của dầm tiệm cận về kết quả của bài toán tất định, hoàn toàn phù hợp với logic vật lý của bài toán.
- ✓ **Độ tin cậy:** Kết quả phân tích đạt sự tương đồng cao khi đối sánh với các công bố quốc tế uy tín về các bài toán tương đương cho thấy mức độ sai lệch của mô hình đề xuất là không đáng kể (dưới 5%).
- ✓ **Độ chính xác:** Kết quả phân tích bằng SFEM được kiểm chứng chéo với phương pháp mô phỏng MCS – phương pháp chuẩn dựa trên mẫu lớn – đảm bảo độ chính xác cao trong dự báo ứng xử ngẫu nhiên của kết cấu dầm.

CHƯƠNG III: PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

3.1. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỘT CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Xem xét kết cấu cột chịu nén đúng tâm có mặt cắt ngang hình chữ nhật với bề rộng là b và chiều cao mặt cắt là h . Trong nghiên cứu này xét trường hợp mất ổn định uốn trong mặt phẳng của cột. Trong trường hợp mô đun đàn hồi của dầm là tất định $E = E_0$, phương trình vi phân cân bằng ổn định của cột như sau:

$$E_0 I \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.1)$$

Cột được chia thành N_e phần tử với chiều dài mỗi phần tử là L_e . Để phân tích ổn định của cột, phần tử cột-dầm được xem xét với hai nút ở hai đầu. Phần tử chịu tác dụng đồng thời của tải trọng gây ra uốn $\{P\}_e$ và lực dọc trục P . Chuyển vị của phần tử được xấp xỉ thông qua ma trận hàm dạng và chuyển vị nút phần tử như (3.2):

$$w_e = [N] \{q_i\}_e \quad (3.2)$$

Trong đó $\{q_i\}_e$ là véc tơ chuyển vị nút của phần tử, $[N]$ là ma trận hàm dạng.

$$\{q_i\}_e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \quad (3.3)$$

Công của ngoại lực của phần tử được xác định như phương trình (3.4):

$$W_e = \frac{1}{2} \{q_i\}_e^T \{P\}_e + \frac{P}{2} \int_0^{L_e} \left(\frac{dw_e}{dx} \right)^2 dx \quad (3.4)$$

Thành phần năng lượng đàn hồi uốn được thiết lập như phương trình (3.5):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\varepsilon]^T \{\sigma\} dV_e \quad (3.5)$$

Cân bằng giữa công của ngoại lực và năng lượng biến dạng uốn của phần tử thu được:

$$\frac{1}{2} \{q_i\}_e^T \{P\}_e + \frac{P}{2} \int_0^{L_e} \left(\frac{dw_e}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\varepsilon]^T \{\sigma\} dV_e \quad (3.6)$$

Quan hệ giữa chuyển vị nút của phần tử và lực nút của phần tử thông qua ma trận độ cứng của phần tử như phương trình (3.7).

$$[k]_e \{q_i\}_e = \{P\}_e \quad (3.7)$$

Thay phương trình (3.7) vào phương trình (3.6) thu được phương trình sau:

$$\frac{1}{2} \{q_i\}_e^T [k]_e \{q_i\}_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\varepsilon]^T \{\sigma\} dV_e - \frac{P}{2} \int_0^{L_e} \left(\frac{dw_e}{dx} \right)^2 dx \quad (3.8)$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng thông qua định luật Hooke như (3.9).

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.9)$$

Thay (3.1) và (3.9) vào phương trình (3.8) nhận được phương trình (3.10).

$$\{q_i\}_e^T [k]_e \{q_i\}_e = \{q_i\}_e^T \left[\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T [D] [N''] dV_e - P \int_0^{L_e} [N']^T [N'] dx \right] \{q_i\}_e \quad (3.10)$$

Từ phương trình (3.10), ma trận độ cứng của phần tử được xác định:

$$[k]_e = [K]_e - P [K_p]_e \quad (3.11)$$

Các ma trận xuất hiện trong phương trình (3.11) được xác định như các phương trình sau:

$$[K]_e = \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T [D] [N''] dV_e \quad (3.12)$$

$$[K_p]_e = \int_0^{L_e} [N']^T [N'] dx = \begin{bmatrix} \frac{6}{5L_e} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L_e} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2L_e}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{L_e}{30} \\ & & \frac{6}{5L_e} & -\frac{1}{10} \\ \text{sym.} & & & \frac{2L_e}{15} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Đối với trường E của phần tử là bất định thì ma trận độ cứng của phần tử chỉ chịu uốn $[K]_e$ được xác định như (3.14) với I là mô men quán tính đối với trục uốn của mặt cắt ngang:

$$[K]_e = \frac{E_0 I}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$[K_p]_e$ là ma trận độ cứng hình học của phần tử xem xét ảnh hưởng của lực dọc đến phần tử chịu uốn. Ma trận $[k]$ được xây dựng từ ma trận $[K]_e$ như (3.15) với ký hiệu $[\bullet]_e^{Ext}$ (tương ứng là $[K]_e^{Ext}$, $[K_p]_e^{Ext}$). Các ma trận này có cùng kích thước với ma trận độ cứng tổng thể. Ký hiệu $_{Ext}$ thể hiện các ma trận này được xây dựng từ $[K]_e$, $[K_p]_e$ bằng cách đặt các phần tử của ma trận cục bộ vào đúng vị trí hàng và cột tương ứng với chỉ số bậc tự do toàn cục của các nút phần tử, trong khi các số hạng còn lại được lấy bằng không.

$$[k] = \sum_{e=1}^{N_e} [k_e] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext} - P \sum_{e=1}^{N_e} [K_p]_e^{Ext} \quad (3.15)$$

Phương trình phân tích ổn định của cột như phương trình (3.16).

$$([K] - \lambda [K_p]) \{\psi\} = 0 \quad (3.16)$$

Trong đó: $[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K]_e^{Ext}$, $[K_p] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_p]_e^{Ext}$, $\lambda = P$ là giá trị riêng của lực tới hạn, $\{\psi\}$ là

véc tơ chuyển vị nút của toàn bộ cột (dạng mất ổn định). Giá trị riêng của lực tới hạn được xác định dựa vào phương trình (3.16). Để phương trình (3.16) có nghiệm không tầm thường thì điều kiện sau phải thỏa mãn:

$$Det([K] - \lambda [K_p]) = 0 \quad (3.17)$$

Giải phương trình (3.17) có thể thu được các giá trị riêng của lực tới hạn tương ứng với các dạng mất ổn định tổng thể khác nhau. Trên thực tế giá trị nhỏ nhất của giá trị riêng tương ứng với tải trọng tới hạn nhỏ nhất được quan tâm trong thực tế tính toán.

3.2. PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN CHO BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH EULER

Xem xét kết cột mặt cắt ngang hình chữ nhật có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều và ba chiều) như các phương trình (3.20) và (3.21). Trong đó E_0 là giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi. $f(x,y)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, hai chiều (2D) và có giá trị kỳ vọng bằng không. Tương tự, $f(x,y,z)$ là trường ngẫu nhiên Gaussian dừng, ba chiều và có giá trị kỳ vọng bằng không. Trong khuôn khổ của luận án giới hạn phân tích đối với dạng mất ổn định uốn theo lý thuyết Euler. Khi đó phương trình vi phân cân bằng ổn định của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian được xác định như phương trình sau:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\mathcal{D}(x, \theta) \frac{d^2 w(x, \theta)}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 w(x, \theta)}{dx^2} = 0 \quad (3.18)$$

Với độ cứng uốn hiệu dụng được xác định như (3.19).

$$\mathcal{D}(x, \theta) = \int_A y_e^2 E(\mathbf{x}, \theta) dy dz \quad (3.19)$$

Phương trình (3.18) là phương trình vi phân có hệ số ngẫu nhiên. Việc tìm nghiệm chính xác của phương trình này gặp nhiều khó khăn về mặt toán học, đồng thời chỉ cung cấp kết quả cho từng hiện thực mẫu riêng lẻ thay vì quy luật phân bố tổng thể. Do đó, luận án phát triển phương pháp SFEM dựa trên kỹ thuật tích phân trọng số kết hợp với phương

pháp nhiều, cho phép xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê của tải trọng tới hạn (kỳ vọng, phương sai).

$$E(x, y) = E_0 [1 + f(x, y)] \quad (3.20)$$

$$E(x, y, z) = E_0 [1 + f(x, y, z)] \quad (3.21)$$

Kết cấu cột được phân chia thành N_e phần tử có mô đun thay đổi ngẫu nhiên không gian như các phương trình (3.22) và (3.23).

$$E_e(x_e, y_e) = E_0 [1 + f_e(x_e, y_e)] \quad (3.22)$$

$$E_e(x_e, y_e, z_e) = E_0 [1 + f_e(x_e, y_e, z_e)] \quad (3.23)$$

Thay phương trình (3.22) vào phương trình (3.12) với $[D] = E_e$ nhận được ma trận độ cứng do uốn của phần tử trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.24).

$$[K]_e = \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e + \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 f_e(x_e, y_e) [N''] dV_e \quad (3.24)$$

Tương tự với trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều, thay phương trình (3.23) vào phương trình (3.12) với $[D] = E_e$ nhận được ma trận độ cứng của phần tử do uốn như phương trình sau:

$$[K]_e = \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e + \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 f_e(x_e, y_e, z_e) [N''] dV_e \quad (3.25)$$

Thay phương trình (3.24) vào phương trình (3.11) nhận được ma trận độ cứng của phần tử cột dầm như phương trình (3.26).

$$[k]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 f_e(x_e, y_e) [N''] dV_e}_{\sum_{i=1}^{N_w} [\Delta K_i]_e \Theta_{i,e}} - [K_P]_e \quad (3.26)$$

Trong phương trình (3.26), $N_w = 3$ là số lượng biến ngẫu nhiên của một phần tử được rời rạc hóa từ trường ngẫu nhiên hai chiều. Các ma trận xuất hiện trong phương trình (3.26) được xác định theo các phương trình sau:

$$[K_0]_e = \int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 [N''] dV_e = \frac{E_0 I}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$[\Delta K_1]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$[\Delta K_2]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[\Delta K_3]_e = \frac{E_0 b}{L_e^6} \begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (3.26) được rời rạc hóa từ trường ngẫu nhiên như phương trình (3.31).

$$\Theta_{i,e} = \int_{A_e} y_e^2 x_e^{i-1} f_e(x_e, y_e) dA_e \quad (3.31)$$

Trong trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều, ma trận độ cứng của phần tử cột-dầm được xác định như (3.32) với các biến ngẫu nhiên cơ bản như (3.37) và các ma trận xuất hiện trong phương trình được xác định theo các phương trình (3.33) - (3.36).

$$[k]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N"]^T E_0 [N"] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N"]^T E_0 f_e(x_e, y_e, z_e) [N"] dV_e}_{\sum_{i=1}^{N_W} [\Delta K_i]_e \Theta_{i,e}} - [K_P]_e \quad (3.32)$$

$$[K_0]_e = \int_{V_e} y_e^2 [N"]^T E_0 [N"] dV_e = \frac{E_0 I}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ & & 12 & -6L_e \\ \text{sym.} & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$[\Delta K_1]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 36L_e^2 & 24L_e^3 & -36L_e^2 & 12L_e^3 \\ & 16L_e^4 & -24L_e^3 & 8L_e^4 \\ & & 36L_e^2 & -12L_e^3 \\ \text{sym.} & & & 4L_e^4 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$[\Delta K_2]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} -144L_e & -84L_e^2 & 144L_e & -60L_e^2 \\ & -48L_e^3 & 84L_e^2 & -36L_e^3 \\ & & -144L_e & 60L_e^2 \\ \text{sym.} & & & -24L_e^3 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$[\Delta K_3]_e = \frac{E_0}{L_e^6} \begin{bmatrix} 144 & 72L_e & -144 & 72L_e \\ & 36L_e^2 & -72L_e & 36L_e^2 \\ & & 144 & -72L_e \\ \text{sym.} & & & 36L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\Theta_{i,e} = \int_{V_e} y_e^2 x_e^{i-1} f_e(x_e, y_e, z_e) dV_e \quad (3.37)$$

Ma trận $[k]$ của toàn kết cấu cột được xây dựng từ $[k_e]$ như (3.38). Khi mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian thì ma trận độ cứng của phần tử được phân chia thành phần tất định và thành phần ngẫu nhiên. Thành phần ngẫu nhiên là hàm của ba biến ngẫu nhiên ($N_w = 3$) được rời rạc hóa từ trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi như (3.31) và (3.37). Vì vậy ma trận độ cứng tổng thể chỉ xét đến ảnh hưởng của uốn là hàm của $N_w \times N_e$ biến ngẫu nhiên như phương trình sau:

$$[k] = \sum_{e=1}^{N_e} [k_e] = \underbrace{\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} [\Delta K_i]_e^{Ext} \Theta_{i,e}}_{[K(\{\chi\})]} - P \underbrace{\sum_{e=1}^{N_e} [K_p]_e^{Ext}}_{[K_p]} \quad (3.38)$$

Ma trận độ cứng của phần tử chỉ chịu uốn là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\} = \{\Theta_{1,e}, \Theta_{2,e}, \Theta_{3,e}\}_{e=1:N_e}$, các biến ngẫu nhiên này có giá trị trung bình là $\bar{\Theta}_i^e$. Vì vậy giá trị riêng của lực tới hạn và dạng mất ổn định cũng là hàm của các biến ngẫu nhiên $\{\Theta\}$. Vì vậy phương trình phân tích ổn định có thể được viết lại như phương trình sau:

$$([K(\{\Theta\})] - \lambda(\{\Theta\})[K_p])\{\psi(\{\Theta\})\} = \{0\} \quad (3.39)$$

Đối với dạng mất ổn định thứ k thì phương trình mất ổn định được viết như (3.40):

$$([K(\{\Theta\})] - \lambda^k(\{\Theta\})[K_p])\{\psi^k(\{\Theta\})\} = \{0\} \quad (3.40)$$

Triển khai chuỗi Taylor các đại lượng xuất hiện trong phương trình (3.40) xung quanh giá trị kỳ vọng của các đại lượng thu được các phương trình (3.41) - (3.43). Ký hiệu $[\bullet]_{\bar{\Theta}_{i,e}}$ là các đạo hàm riêng theo các biến ngẫu nhiên được xác định tương ứng với giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên.

$$\begin{aligned}
[K(\{\Theta\})] &\approx \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i,e} - \bar{\Theta}_i^e) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i_1,e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}) (\Theta_{i_2,e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \dots
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^k(\{\Theta\}) &\approx \lambda_0^k + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i,e} - \bar{\Theta}_i^e) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i_1,e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}) (\Theta_{i_2,e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \dots
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
\{\psi^k(\{\Theta\})\} &= \{\psi_0^k\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \{\psi^k(\{\Theta\})\}}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i,e} - \bar{\Theta}_i^e) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 \{\psi^k(\{\Theta\})\}}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} (\Theta_{i_1,e_1} - \bar{\Theta}_{i_1}^{e_1}) (\Theta_{i_2,e_2} - \bar{\Theta}_{i_2}^{e_2}) + \dots
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Đạo hàm riêng bậc nhất theo các biến ngẫu nhiên và đạo hàm riêng bậc hai của các đại lượng xuất hiện trong các phương trình (3.41) - (3.43) được xác định tại $\{\Theta\} = 0$. Các biến ngẫu nhiên được rời rạc hóa từ cùng một trường ngẫu nhiên có giá trị kỳ vọng bằng không. Do đó giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên cũng bằng không. Thay $\bar{\Theta}_{i,e} = 0$ vào các phương trình (3.41) - (3.43) nhận được các phương trình (3.44) - (3.46).

$$[K] \approx \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2} + \dots \tag{3.44}$$

$$\lambda^k(\{\Theta\}) \approx \lambda_0^k + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2} + \dots \tag{3.45}$$

$$\{\psi^k\} = \{\psi_0^k\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \{\psi^k(\{\Theta\})\}}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i,e} + \frac{1}{2} \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left[\frac{\partial^2 \{\psi^k(\{\Theta\})\}}{\partial \Theta_{i_1,e_1} \partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2} + \dots \tag{3.46}$$

Thay các phương trình từ (3.44) - (3.46) vào phương trình (3.40), đồng nhất các hệ số cùng bậc của các biến ngẫu nhiên nhận được các kết quả sau:

✓ Các hệ số tự do:

$$\left[\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} - \lambda_0^k [K_p] \right] \{\psi_o^k\} = 0 \tag{3.47}$$

✓ Các hệ số bậc nhất:

$$\left[\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} - \lambda_0^k [K_P] \right] \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \{\psi^k(\{\Theta\})\}}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} =$$

$$\left[[K_P] \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} - \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \right] \{\psi_o^k\} \quad (3.48)$$

Nhân cả hai vế của phương trình (3.40) với $\{\psi^k(\{\Theta\})\}^T$ nhận được phương trình (3.49).

$$\{\psi^k(\{\Theta\})\}^T \left([K(\{\Theta\})] - \lambda^k(\{\Theta\}) [K_P] \right) \{\psi^k(\{\Theta\})\} = \{0\} \quad (3.49)$$

Lấy đạo hàm riêng theo các biến ngẫu nhiên $\Theta_{i,e}$ hai vế của phương trình (3.49) và để ý đến các điều kiện trong các phương trình (3.47) và (3.48), đạo hàm riêng bậc nhất của giá trị riêng thứ k của lực tới hạn theo các biến $\Theta_{i,e}$ được xác định như (3.50).

$$\left[\frac{\partial \lambda^k(\{\Theta\})}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} = \frac{\{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_P] \{\psi_o^k\}} \quad (3.50)$$

Thay phương trình (3.50) vào phương trình (3.45) nhận được xấp xỉ bậc nhất của giá trị riêng của lực tới hạn theo các biến ngẫu nhiên như phương trình (3.51).

$$\lambda^k(\{\Theta\}) \approx \lambda_0^k + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \frac{\{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_P] \{\psi_o^k\}} \Theta_{i,e} \quad (3.51)$$

Dựa vào phương trình (3.51), thực hiện các phép toán lấy kỳ vọng và phương sai của giá trị riêng thứ k của lực tới hạn nhận được các phương trình sau:

$$\mathbb{E}(\lambda^k) = \mathbb{E} \left[\lambda_0^k + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_w} \frac{\{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i,e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i,e}} \{\psi_o^k\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_P] \{\psi_o^k\}} \Theta_{i,e} \right] \simeq \lambda_0^k \quad (3.52)$$

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\left\{ \{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1,e_1}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_1,e_1}} \{\psi_o^k\} \{\psi_o^k\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_2,e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_2,e_2}} \{\psi_o^k\} \right\}}{\{\psi_o^k\}^T [K_P] \{\psi_o^k\} \{\psi_o^k\}^T [K_P] \{\psi_o^k\}} \times \mathbb{E}[\Theta_{i_1,e_1} \Theta_{i_2,e_2}] \right\} \quad (3.53)$$

Đề ý đến phương trình (3.31) tương ứng với trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều. Giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên trong phương trình (3.53) được xác định như phương trình (3.54).

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1, e_1} \Theta_{i_2, e_2}] = \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} \mathbb{E}[f_{e_1}(x_{e_1}, y_{e_1}) f_{e_2}(x_{e_2}, y_{e_2})] dA_{e_1} dA_{e_2} \quad (3.54)$$

Tương tự, trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều thì giá trị kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên xuất hiện trong phương trình (3.53) được xác định như phương trình (3.55) khi đề ý đến phương trình (3.37).

$$\mathbb{E}[\Theta_{i_1, e_1} \Theta_{i_2, e_2}] = \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} \mathbb{E}[f_{e_1}(x_{e_1}, y_{e_1}, z_{e_1}) f_{e_2}(x_{e_2}, y_{e_2}, z_{e_2})] dV_{e_1} dV_{e_2} \quad (3.55)$$

Giá trị kỳ vọng của trường ngẫu nhiên hai chiều xuất hiện trong phương trình (3.54) và giá trị kỳ vọng của trường ngẫu nhiên ba chiều xuất hiện trong phương trình (3.55) được tính toán thông qua hàm tự tương quan của trường ngẫu nhiên như các phương trình sau:

$$\mathbb{E}[f_{e_1}(x_{e_1}, y_{e_1}) f_{e_2}(x_{e_2}, y_{e_2})] = R_{f_{e_1} f_{e_2}} \quad (3.56)$$

$$\mathbb{E}[f_{e_1}(x_{e_1}, y_{e_1}, z_{e_1}) f_{e_2}(x_{e_2}, y_{e_2}, z_{e_2})] = R_{f_{e_1} f_{e_2}} \quad (3.57)$$

Thay phương trình (3.56) vào phương trình (3.54), sau đó thay (3.54) vào phương trình (3.53) nhận được xấp xỉ bậc nhất của phương sai giá trị riêng của lực tới hạn của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.58).

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1, e_1}} \right]_{\bar{\Theta}_{i, e}} \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_2, e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i, e}} \left\{ \psi_o^k \right\}}{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\}} \times \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \quad (3.58)$$

Tương tự phương sai của giá trị riêng của lực tới hạn của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều được xác định như phương trình (3.59) khi thay các phương trình (3.57), (3.55) vào phương trình (3.53).

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_1, e_1}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_1, e_1}} \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T \left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i_2, e_2}} \right]_{\bar{\Theta}_{i_2, e_2}} \left\{ \psi_o^k \right\}}{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\}} \times \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \quad (3.59)$$

Ma trận độ cứng tổng thể xét đến ảnh hưởng của uốn được thiết lập từ ma trận độ cứng của từng phần tử. Ma trận độ cứng đàn hồi của phần tử là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Do đó ma trận độ cứng đàn hồi tổng thể cũng là hàm tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Đạo hàm bậc nhất của ma trận độ cứng đàn hồi tổng thể của toàn bộ kết cấu được xác định tương ứng với giá trị kỳ vọng bằng không, được xác định như phương trình (3.60). Ký hiệu $[\Delta K_i]_e^{Ext}$ là ma trận được mở rộng từ ma trận $[K_i]_e$

$$\left[\frac{\partial [K(\{\Theta\})]}{\partial \Theta_{i, e}} \right]_{\bar{\Theta}_{i, e}} = [\Delta K_i]_e^{Ext} \quad (3.60)$$

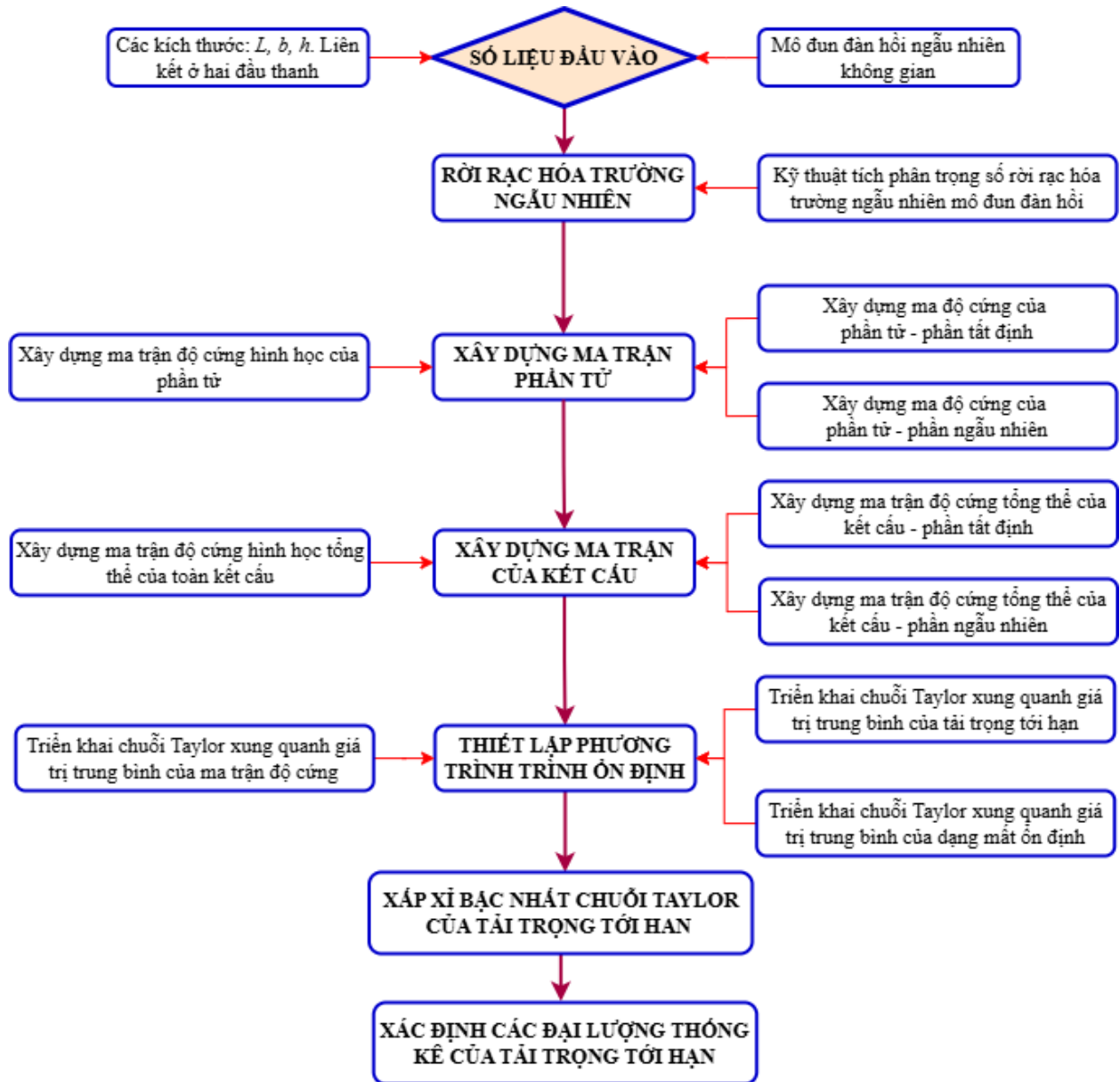
Thay phương trình (3.60) vào các phương trình (3.58) và (3.59) thu được phương sai của giá trị riêng của lực tới hạn như phương trình tương ứng với trường hợp E ngẫu nhiên hai chiều và như phương trình (3.62) tương ứng với trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều.

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \left\{ \psi_o^k \right\}}{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\}} \times \int_{A_{e_1}} \int_{A_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dA_{e_1} dA_{e_2} \right\} \quad (3.61)$$

$$Var(\lambda^k) = \sum_{e_1=1}^{N_e} \sum_{e_2=1}^{N_e} \sum_{i_1=1}^{N_w} \sum_{i_2=1}^{N_w} \left\{ \frac{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [\Delta K_{i_1}]_e^{Ext} \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [\Delta K_{i_2}]_e^{Ext} \left\{ \psi_o^k \right\}}{\left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\} \left\{ \psi_o^k \right\}^T [K_P] \left\{ \psi_o^k \right\}} \times \int_{V_{e_1}} \int_{V_{e_2}} y_{e_1}^2 x_{e_1}^{i_1-1} y_{e_2}^2 x_{e_2}^{i_2-1} R_{f_{e_1} f_{e_2}} dV_{e_1} dV_{e_2} \right\} \quad (3.62)$$

Phương trình (3.63) xác định COV của lực tới hạn. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định ngẫu nhiên bằng SFEM như Hình 3.1 .

$$COV = \frac{\sqrt{Var[\lambda^k]}}{\mathbb{E}[\lambda^k]} \quad (3.63)$$



Hình 3.1. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng SFEM

3.3. PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER NGẪU NHIÊN CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN BẰNG MÔ PHỎNG MONTE CARLO

Để xác thực các phương trình được thiết lập bằng SFEM để phân tích ổn định của cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian và kiểm tra tính chính xác và sự phù hợp của phương pháp được đề xuất, trong phần này tác giả xây dựng một phương pháp độc lập dựa trên MCS kết hợp với FEM tiêu chuẩn để phân tích ổn định ngẫu nhiên của cột. Sử dụng kỹ thuật biểu diễn phổ để biểu diễn trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.64) và ngẫu nhiên ba chiều như các phương trình (3.65).

$$f(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} x + \kappa_{2n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)} \right] \\ &+ B_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} x - \kappa_{2n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x + \kappa_{2n_2} y + \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x + \kappa_{2n_2} y - \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x - \kappa_{2n_2} y + \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \cos \left[\kappa_{1n_1} x - \kappa_{2n_2} y - \kappa_{3n_3} z + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Thay phương trình (3.64) vào phương trình (3.22) nhận được mô đun đàn hồi của phần tử tương ứng với trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.66). Tương tự thay phương trình (3.65) vào phương trình (3.23) thu được mô đun đàn hồi của phần tử tương ứng với trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều như phương trình (3.67). Trong các phương trình (3.66) và (3.67) Δ_e là khoảng cách từ gốc tọa độ tổng thể (được chọn trùng với vị trí đầu dầm) đến nút i của phần tử đang xét.

$$E_e(x_e, y_e) = E_0 \left[1 + \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)} \right] \\ &+ B_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)} \right] \end{aligned} \right\} \right] \quad (3.66)$$

$$E_e(x_e, y_e, z_e) = E_0 \left[1 + \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \right] \\ &+ A_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \right] \end{aligned} \right\} \right] \quad (3.67)$$

Thay phương trình (3.66) vào phương trình (3.12) với $[D] = E_e(x_e, y_e)$ thu được ma trận độ cứng đàn hồi của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều như (3.68):

$$[K]_e = \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 E_0 [N'']^T [N''] dV_e}_{[K_0]_e} + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \begin{aligned} &A_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)} \right] \\ &+ B_{n_1 n_2} \cos \left[\kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)} \right] \end{aligned} \right\} [N''] dV_e}_{[\Delta K]_e} \quad (3.68)$$

Tương ứng với trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều ma trận độ cứng đàn hồi được xác định như (3.69) khi thay phương trình (3.67) vào phương trình (3.12).

$$\begin{aligned}
 [K]_e = & \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 E_0 [N'']^T [N''] dV_e}_{[K_0]_e} \\
 & + \underbrace{\int_{V_e} y_e^2 [N'']^T E_0 \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \left\{ \begin{aligned} & A_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \cos \begin{bmatrix} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e \\ + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(1)} \end{bmatrix} \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \cos \begin{bmatrix} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) + \kappa_{2n_2} y_e \\ - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(2)} \end{bmatrix} \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \cos \begin{bmatrix} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e \\ + \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(3)} \end{bmatrix} \\ & + A_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \cos \begin{bmatrix} \kappa_{1n_1} (x_e + \Delta_e) - \kappa_{2n_2} y_e \\ - \kappa_{3n_3} z_e + \Phi_{n_1 n_2 n_3}^{(4)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} [N''] dV_e}_{[\Delta K]_e} \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Như vậy, ma trận độ cứng đàn hồi của phần tử trong trường hợp cột có E ngẫu nhiên không gian bao gồm hai thành phần: Thành phần thứ nhất được xác định dựa trên giá trị kỳ vọng của E tương ứng là thành phần tất định có thể được xác định như phương trình (3.33); Thành phần thứ hai là $[\Delta K]_e$ tương ứng là thành phần ngẫu nhiên xét đến tính ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi.

$$[k] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} - P \sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext} \quad (3.70)$$

Thay phương trình (3.70) vào phương trình (3.16) nhận được phương trình phân tích ổn định của cột như phương trình

$$\left[\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} - P \sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext} \right] \{\psi\} = \{0\} \quad (3.71)$$

Sử dụng các phương trình (3.64) và (3.65) tạo N hàm ngẫu nhiên của trường ngẫu nhiên không gian. Dựa trên tập dữ liệu về tính ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi được tạo ra kết hợp với FEM tiêu chuẩn có thể xác định được giá trị riêng thứ k của lực tới hạn ở lần mô phỏng thứ i như phương trình sau:

$$Det \left(\sum_{e=1}^{N_e} [K_0]_e^{Ext} + \sum_{e=1}^{N_e} [\Delta K]_e^{Ext} - \lambda_i^k \sum_{e=1}^{N_e} [K_P]_e^{Ext} \right) = 0 \quad (3.72)$$

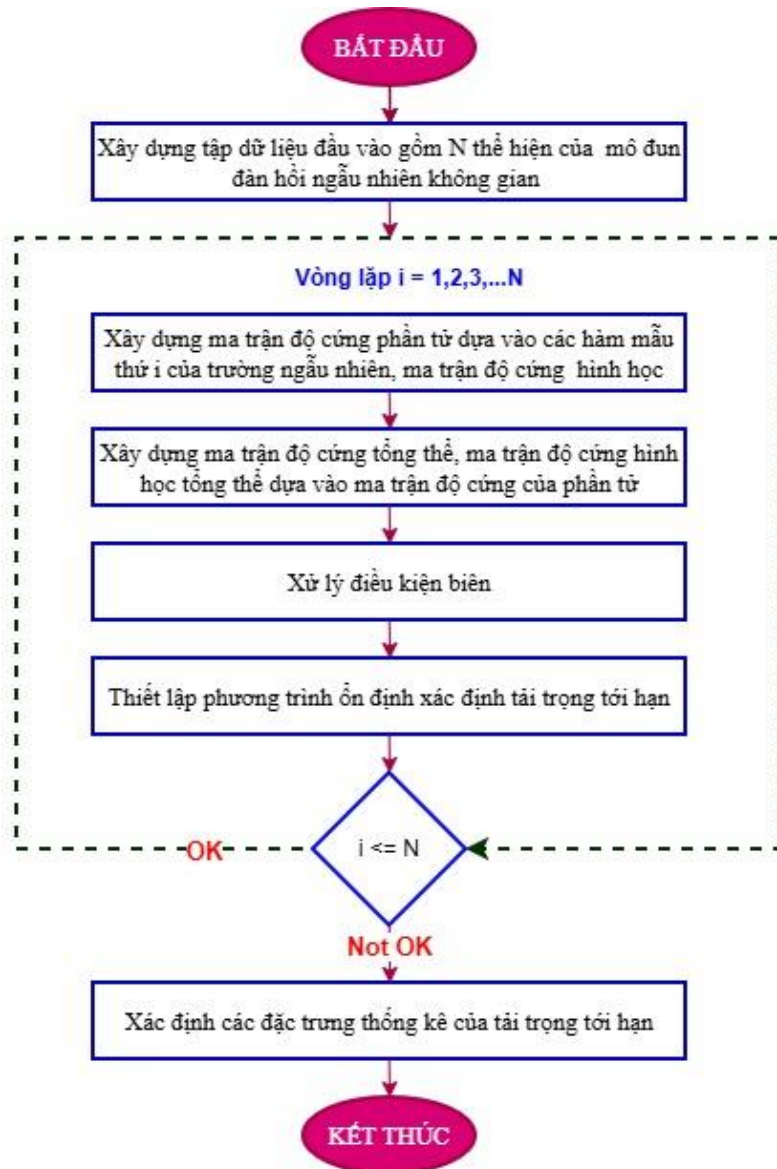
Dựa vào phương trình (3.72) để phân tích nhận được N giá trị riêng thứ k của lực tới hạn. Xử lý thống kê trên tập dữ liệu nhận được có thể xác định được đặc trưng thống kê của mẫu bao gồm giá trị trung bình và phương sai như các phương trình sau:

$$\overline{\lambda_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \quad (3.73)$$

$$s_{\lambda_k}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\lambda_i^k - \overline{\lambda_k})^2 \quad (3.74)$$

Hệ số biến thiên của giá trị riêng lực tới hạn được xác định như phương trình (3.75). Hình 3.2 trình bày tổng quát phân tích ổn định ngẫu nhiên bằng MCS.

$$\text{COV} = \frac{\sqrt{s_{\lambda_k}^2}}{\overline{\lambda_k}} \quad (3.75)$$



Hình 3.2. Sơ đồ tổng quát phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên bằng MCS

3.4. KIỂM CHỨNG MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN NGẪU NHIÊN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

3.4.1. Đối sánh mô hình dầm phẳng và không gian trong phân tích ổn định ngẫu nhiên

Để đánh giá toàn diện sự ổn định của cột dưới tác động của trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều $E(x,y,z,\theta)$, hệ thống được rời rạc hóa bằng phần tử dầm không gian 3D (12 bậc tự do). Sự thăng giáng không gian của vật liệu trên mặt cắt ngang sinh ra các đặc trưng ngẫu nhiên, bao gồm độ cứng dọc trục $D_0(x,\theta)$, độ cứng uốn $D_{yz}(x,\theta)$, $D_{zz}(x,\theta)$, $D_{yy}(x,\theta)$ và đặc biệt là các mô men tĩnh ngẫu nhiên $S_y(x,\theta)$ và $S_z(x,\theta)$ dẫn đến sự lệch tâm đàn hồi. Ma trận độ cứng đàn hồi $[K]_e$ của phần tử dầm không gian được lắp ráp từ các khối ma trận con tương ứng với các nhóm biến dạng (nén, uốn x-y, uốn x-z, xoắn). Sự hiện diện của $S_y(x,\theta)$ và $S_z(x,\theta)$ kích thích hiệu ứng ghép cặp không gian, thể hiện qua các khối ngoài đường chéo chính. Ma trận độ cứng hình học $[K_P]_e$ mô tả sự suy giảm độ cứng dưới tác dụng của tải trọng dọc trục. Ma trận này có cấu trúc đường chéo khối độc lập, bao gồm khối ma trận độ cứng hình học trong mặt phẳng x-y: $[K_P^{xy}]_e$, khối ma trận độ cứng hình học trong mặt phẳng x-z: $[K_P^{xz}]_e$ và ma trận suy giảm độ cứng xoắn $[K_{xoan}]_e$.

$$[K]_e = \begin{bmatrix} [K_{uu}]_e & [K_{uv}]_e & [K_{uw}]_e & [0] \\ [K_{uv}]_e^T & [K_{vv}]_e & [K_{vw}]_e & [0] \\ [K_{uw}]_e^T & [K_{vw}]_e^T & [K_{ww}]_e & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [K_{xoan}]_e \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$[K_P]_e = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [K_P^{xy}]_e & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_P^{xz}]_e & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [K_P^{xoan}]_e \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Phân tích ổn định cột chịu nén với trường $E(x,y,z,\theta)$ ngẫu nhiên theo mô hình phần tử không gian bao gồm đầy đủ các bậc tự do và hiệu ứng ghép cặp lệch tâm. Tuy nhiên, về mặt bản chất thống kê mô đun đàn hồi có giá trị kỳ vọng bằng hằng số, giá trị kỳ vọng của các biến đổi ngẫu nhiên bằng không. Kéo theo các mô men tĩnh ngẫu nhiên và độ cứng đàn hồi quán tính ly tâm có xu hướng triệt tiêu có kỳ vọng lý thuyết bằng không $\mathbb{E}[S_y(x,\theta)] = 0$, $\mathbb{E}[S_z(x,\theta)] = 0$, $\mathbb{E}[D_{yz}(x,\theta)] = 0$. Do đó ở trạng thái trung bình thống kê, các khối ghép cặp $[K_{uv}]_e$, $[K_{uw}]_e$, $[K_{vw}]_e$ tiến về ma trận không, khiến sơ đồ 3D suy biến và phân tách thành

các bài toán độc lập. Điều này cho thấy cơ sở lý thuyết đề khẳng định rằng, mô hình dầm phẳng (sơ đồ rút gọn chỉ sử dụng độ cứng uốn hiệu dụng) có khả năng cung cấp kết quả hội tụ chặt chẽ về lực tới hạn kỳ vọng so với mô hình không gian, đồng giảm đáng kể khối lượng tính toán. Sự hiện diện của các khối ghép cặp và các bậc tự do ngoài mặt phẳng đóng vai trò như những nhiễu bậc cao.

Xét cột chịu nén đúng tâm có chiều dài $L = 8\text{ m}$, mặt cắt ngang hình vuông $b = h = 0,25\text{ m}$ liên kết một đầu ngàm một đầu tự do, E thay đổi ngẫu nhiên ba chiều có giá trị kỳ vọng $E_0 = 30 \times 10^9\text{ N/m}^2$, COV của E bằng 20%. Thực hiện mô phỏng để tính toán các đại lượng thống kê của tải trọng tới hạn do mất ổn định uốn theo mô hình dầm phẳng và mô hình không gian. Kết quả thể hiện trong Bảng 3.1 cho thấy sự khác biệt giữa hai mô hình là nhỏ. Dưới tác động của trường ngẫu nhiên ba chiều, các thành phần ghép cặp không gian do lệch tâm đàn hồi có xu hướng triệt tiêu trên bình diện thống kê. Qua đó, cho thấy mô hình dầm phẳng được sử dụng là chấp nhận được trong phạm vi nghiên cứu của luận án.

Bảng 3.1. So sánh đặc trưng thống kê của lực tới hạn theo mô hình dầm phẳng và dầm không gian

Chiều dài tương quan	Kỳ vọng của lực tới hạn (kN)			Độ lệch chuẩn lực tới hạn (kN)		
	Dầm phẳng	Dầm không gian	% Sai khác	Dầm phẳng	Dầm không gian	% Sai khác
$d = 0,01L$	373,558	368,578	1,333	5,882	5,725	2,669
$d = 0,1L$	367,377	362,725	1,266	32,928	32,453	1,443
$d = L$	37,406	371,477	0,517	65,776	65,407	0,561

3.4.2. Kiểm tra sự hội tụ của hệ số biến thiên lực tới hạn theo mật độ lưới chia phần tử

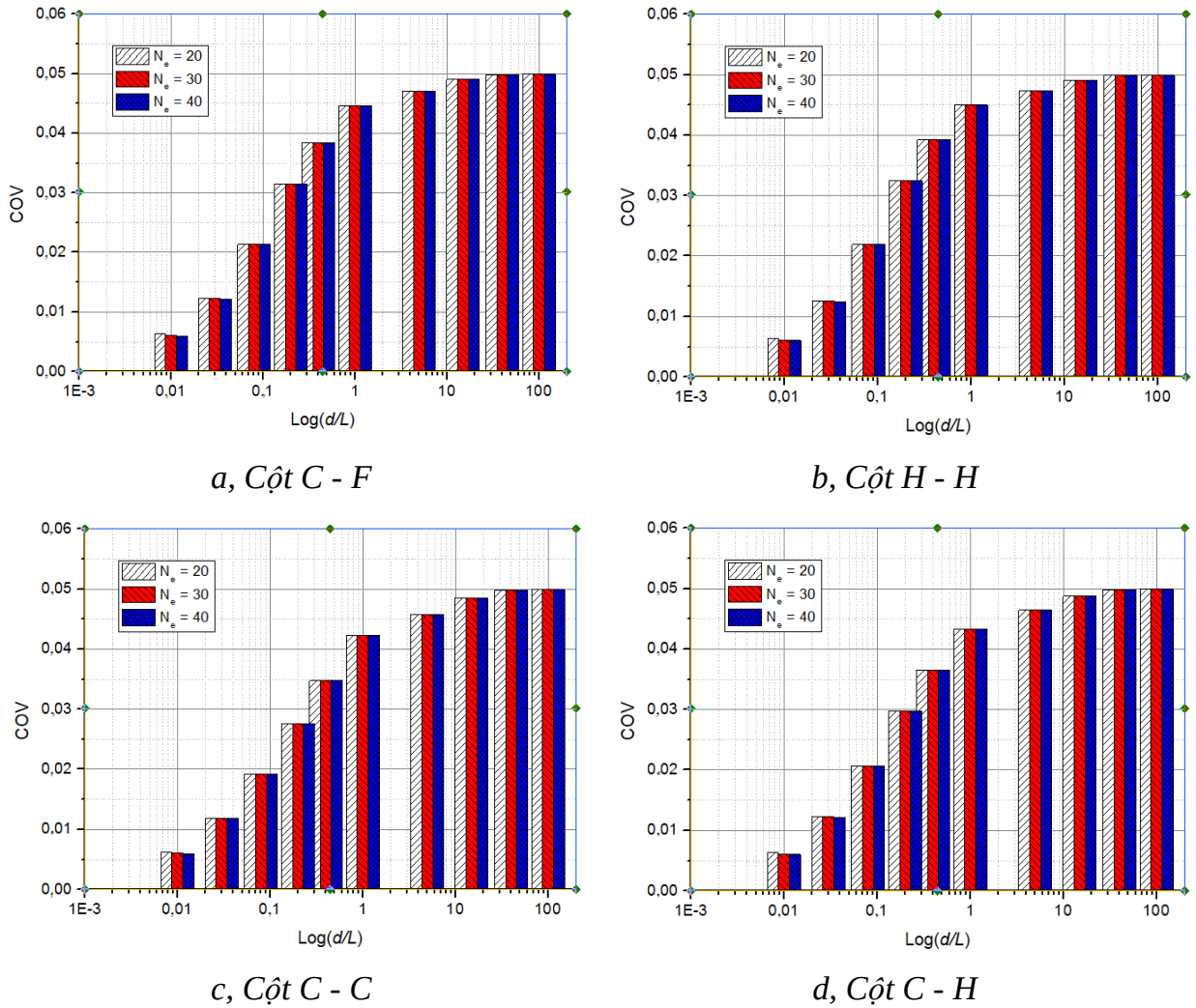
Xét cột chịu nén đúng tâm có chiều dài $L = 8\text{ m}$, mặt cắt ngang hình vuông $b = h = 0,25\text{ m}$, được khảo sát trong bốn điều kiện biên khác nhau: ngàm–ngàm (C – C), ngàm–khớp (C – H), khớp–khớp (H – H) và ngàm–tự do (C – F). Mô đun đàn hồi được mô hình hóa thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều) dưới dạng trường ngẫu nhiên Gaussian, dừng. Hàm tự hiệp phương sai của E ngẫu nhiên hai chiều như phương trình (3.78), tương tự như (3.79) trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều với giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi $E_0 = 30 \times 10^9\text{ N/m}^2$. Độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên $\sigma_f = 0,05$, chiều dài tương quan không gian: $d_x = d_y = d_z = d$ với d thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$.

$$C_{EE}(\xi_1, \xi_2) = E_0^2 \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (3.78)$$

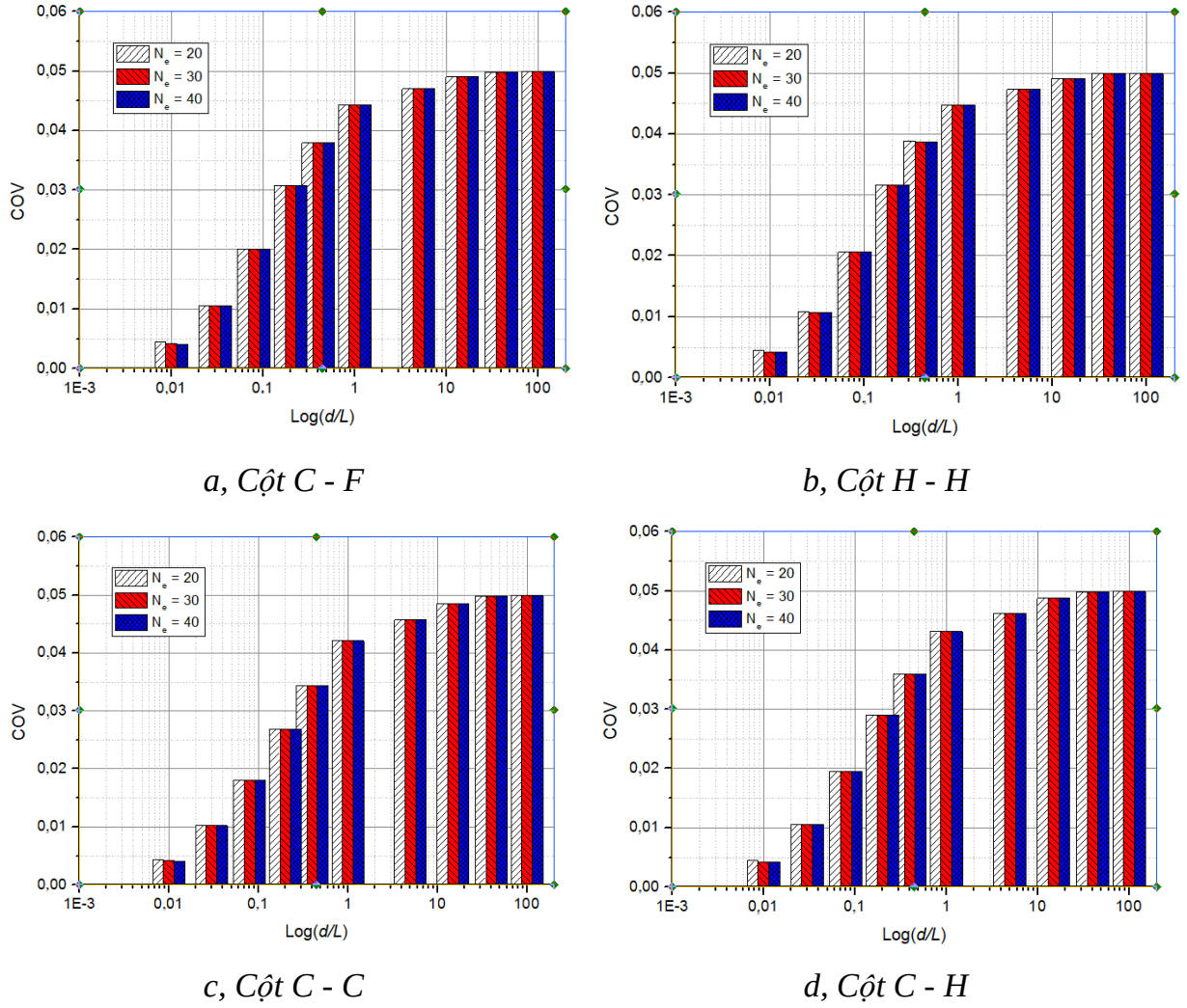
$$C_{EE}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E_0^2 \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (3.79)$$

Sự hội tụ của COV của lực tới hạn theo mật độ lưới phần tử được đánh giá với ba mô hình với số lượng phần tử lần lượt $N_e = 20$, 30, và 40 được xem xét cho bốn điều kiện biên khác nhau ở hai đầu cột. Kết quả phân tích sự hội tụ của COV lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều được trình bày trong Hình 3.3, trong khi Hình 3.4 thể hiện kết quả tương ứng đối với trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều.

Kết quả thu được cho thấy, khi số lượng phần tử bằng 40, giá trị COV của lực tới hạn thu được từ mô hình SFEM đạt đến độ hội tụ ổn định và hầu như không phụ thuộc vào mật độ lưới chia phần tử và ổn định với chiều dài tương quan không gian khác nhau của trường ngẫu nhiên. Do đó, trong các phân tích tiếp theo, mô hình với $N_e = 40$ phần tử được lựa chọn nhằm đảm bảo sự cân bằng giữa độ chính xác và chi phí tính toán.



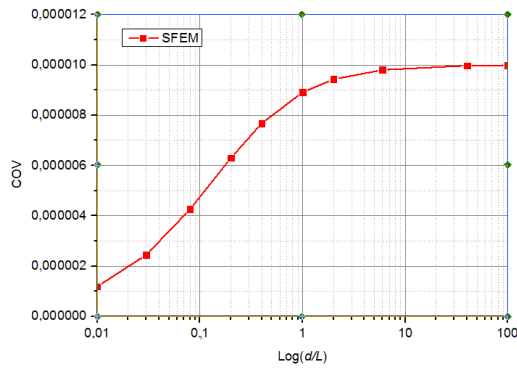
Hình 3.3. Kiểm tra sự hội tụ phụ thuộc vào lưới chia phần tử của COV lực tới hạn trong trường hợp ngẫu nhiên hai chiều



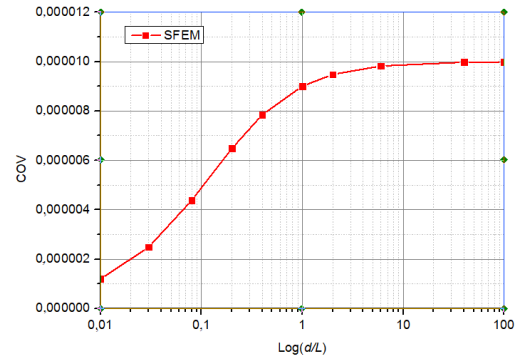
Hình 3.4. Kiểm tra sự hội tụ phụ thuộc vào lưới chia phần tử của COV lực tới hạn trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều

3.4.3. Kiểm tra mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên theo lý thuyết tính toán ngẫu nhiên

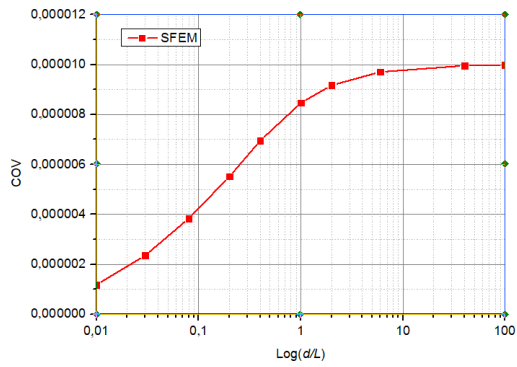
Khi mô đun đàn hồi của vật liệu được giả định là trường ngẫu nhiên có độ lệch chuẩn rất nhỏ, bài toán khi đó tiệm cận bài toán tất định. Hệ quả là thành phần ngẫu nhiên của cột tiến dần đến 0, cụ thể là COV của lực tới hạn, cũng phải có giá trị rất nhỏ, và ứng xử của cột gần như tất định. Với độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên không gian $\sigma_f = 0,00001$, COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều được thể hiện trong Hình 3.5 và Hình 3.6 trong trường hợp ngẫu nhiên ba chiều. Kết quả cho thấy, khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên giảm đến giá trị rất nhỏ, biến thiên của đáp ứng ngẫu nhiên của cột cũng giảm tương ứng, phản ánh đúng bản chất vật lý của bài toán ngẫu nhiên và sự phù hợp với lý thuyết tính toán ngẫu nhiên. Điều này khẳng định rằng mô hình SFEM được xây dựng có độ tin cậy và đảm bảo tính chính xác khi áp dụng cho bài toán phân tích cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian.



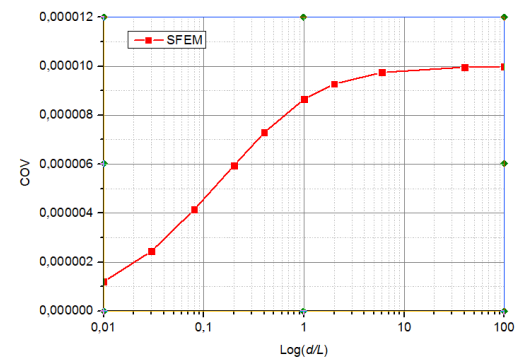
a, Cột C - F



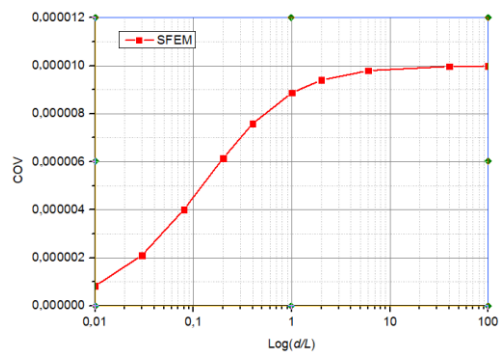
b, Cột H - H



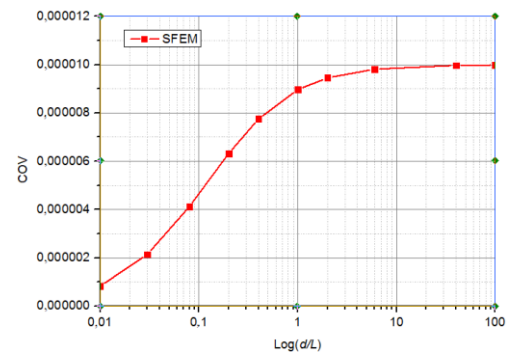
c, Cột C - C



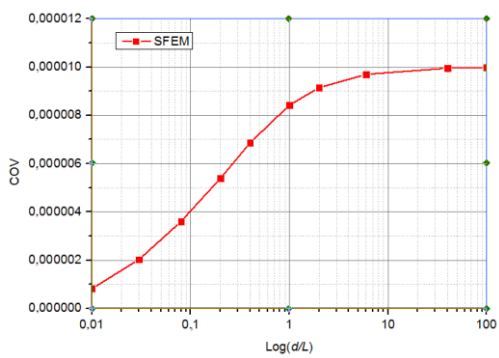
d, Cột C - H

Hình 3.5. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

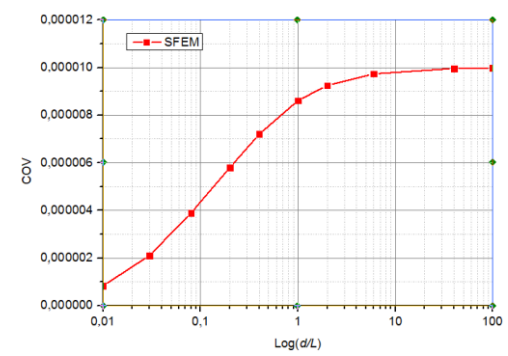
a, Cột C - F



b, Cột H - H



c, Cột C - C



d, Cột C - H

Hình 3.6. COV của lực tới hạn với mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

3.4.4. Kiểm chứng mô hình phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với nghiên cứu đã công bố

Trong tài liệu [136] các tác giả đã nghiên cứu ổn định của cột chịu nén đúng tâm có liên kết khớp tại hai đầu với độ cứng thay đổi ngẫu nhiên một chiều bằng kỹ thuật nhiễu bậc hai kết hợp phương pháp biểu diễn chuỗi trục giao. Trong bối cảnh kích thước hình học được xem xét là bất định thì sự thay đổi ngẫu nhiên một chiều của độ cứng tương ứng với mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên một chiều dọc theo chiều dài cột. Kết quả thu được từ nghiên cứu này được sử dụng để đối chiếu và kiểm chứng với phương pháp SFEM được phát triển trong luận án, khi mô đun đàn hồi được xét như một trường ngẫu nhiên không gian có chiều dài tương quan theo trục x trùng với giá trị trong [136], trong khi chiều dài tương quan theo các trục còn lại (y và z) được chọn rất lớn ($100L$) nhằm làm suy yếu ảnh hưởng ngẫu nhiên theo các phương này. Khi đó, ứng xử ngẫu nhiên của trường không gian trở nên tương đương với trường ngẫu nhiên một chiều, cho phép đánh giá tính phù hợp và độ tin cậy của mô hình SFEM đối chiếu với kết quả phân tích đã được công bố.

Xét cột chịu nén đúng tâm liên kết khớp ở hai đầu có các kích thước hình học: $L = 2\text{ m}$, $b = h = 0,3\text{ m}$. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian có hàm tự tương quan như các phương trình (3.78) và (3.79). Giá trị kỳ vọng của mô đun đàn hồi $E_0 = 30 \times 10^9\text{ N/m}^2$. Quan hệ giữa lực tới hạn chuẩn hóa và lực tới hạn chuẩn hóa không thứ nguyên được sử dụng trong tài liệu [136] được xác định thông qua phương trình sau:

$$\frac{P_{cr}}{P_{cr}^0} = \frac{1}{\pi^2} \times \frac{P_{cr} L^2}{m_{EI}} = \frac{1}{\pi^2} \times \frac{P_{cr} L^2}{E_0 I} \quad (3.80)$$

Với P_{cr} là lực tới hạn xét đến tính ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi, P_{cr}^0 là lực tới hạn của bài toán bất định, m_{EI} là giá trị kỳ vọng của độ cứng chống uốn. Bảng 3.2 thể hiện giá trị kỳ vọng của lực tới hạn không thứ nguyên được xác định trong tài liệu [136]. Sử dụng phương trình (3.80) có thể xác định được kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa như Bảng 3.3, đồng thời kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa được so sánh với kết quả phân tích bằng SFEM. Bên cạnh đó, Bảng 3.4 thể hiện so sánh COV của lực tới hạn chuẩn hóa được xác định bằng SFEM đề xuất trong luận án và công bố trong tài liệu [136].

Kết quả phân tích và so sánh cho thấy tồn tại sai lệch nhỏ giữa kết quả phân tích bằng SFEM với kết quả đã công bố, tuy nhiên sai số này ở mức thấp (dưới 5%). Một trong những nguyên nhân dẫn đến sai khác này nằm ở phương pháp được lựa chọn để rời rạc hóa trường ngẫu nhiên cũng như kỹ thuật để lan truyền tính ngẫu nhiên vào trong hệ thống. Kết quả kiểm chứng không chỉ cho thấy tính chính xác cũng như độ tin cậy của SFEM được đề xuất mà còn thể hiện tính linh hoạt của SFEM khi được mở rộng phân tích cho bài toán có

yếu tố đầu vào ngẫu nhiên không gian thì hoàn toàn có thể sử dụng để phân tích cho bài toán có yếu tố đầu vào ngẫu nhiên một chiều.

Bảng 3.2. Kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa không thứ nguyên theo [136]

Mô đun đàn hồi, chiều dài tương quan	$\sigma_f = 0,1$	$\sigma_f = 0,2$	$\sigma_f = 0,3$
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x = 4 m$,	9,860	9,829	9,781
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x = 12 m$	9,862	9,852	9,838

Bảng 3.3. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136]

Mô đun đàn hồi, chiều dài tương quan	$\sigma_f = 0,1$	$\sigma_f = 0,2$	$\sigma_f = 0,3$
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x = 4 m$, [136]	0,9990	0,9959	0,9910
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x = 4 m$, $d_y = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x = 4 m$, $d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000
Sai số (%)	0,1001	0,4117	0,9082
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x = 12 m$, [136]	0,9992	0,9982	0,9968
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x = 12 m$, $d_y = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x = 12 m$, $d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	1,0000	1,0000	1,0000
Sai số (%)	0,0801	0,1803	0,3210

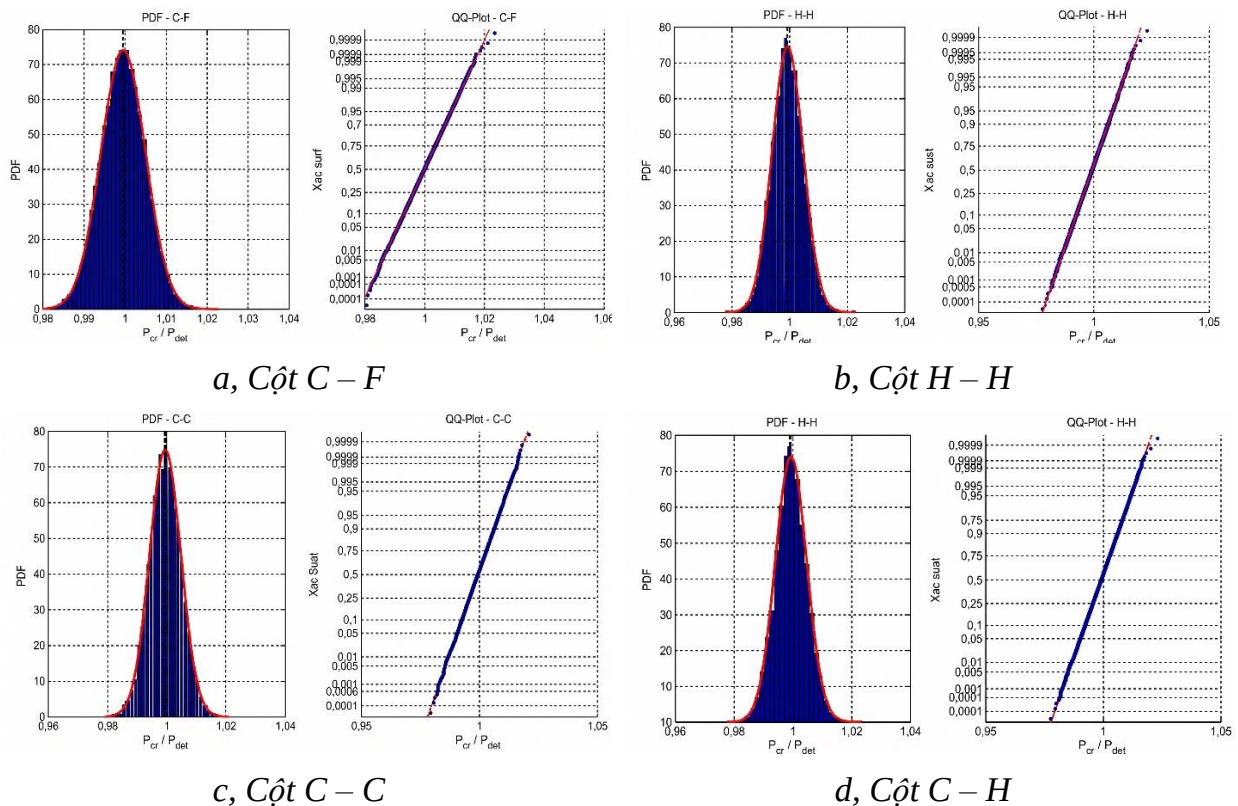
Bảng 3.4. So sánh COV của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và [136]

Mô đun đàn hồi, chiều dài tương quan	$\sigma_f = 0,1$	$\sigma_f = 0,2$	$\sigma_f = 0,3$
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x = 4 m$, [136]	0,0962	0,1925	0,2892
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x = 4 m$, $d_y = 100L$, [Luận án]	0,0919	0,1838	0,2758
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x = 4 m$, $d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	0,0919	0,1838	0,2758
Sai số (%)	4,4699	4,5195	4,6335
Ngẫu nhiên 1 chiều, $d_x = 12 m$, [136]	0,0981	0,1964	0,2948
Ngẫu nhiên 2 chiều, $d_x = 12 m$, $d_y = 100L$, [Luận án]	0,0971	0,1942	0,2914
Ngẫu nhiên 3 chiều, $d_x = 12 m$, $d_y = d_z = 100L$, [Luận án]	0,0971	0,1942	0,2914
Sai số (%)	1,0194	1,1202	1,1533

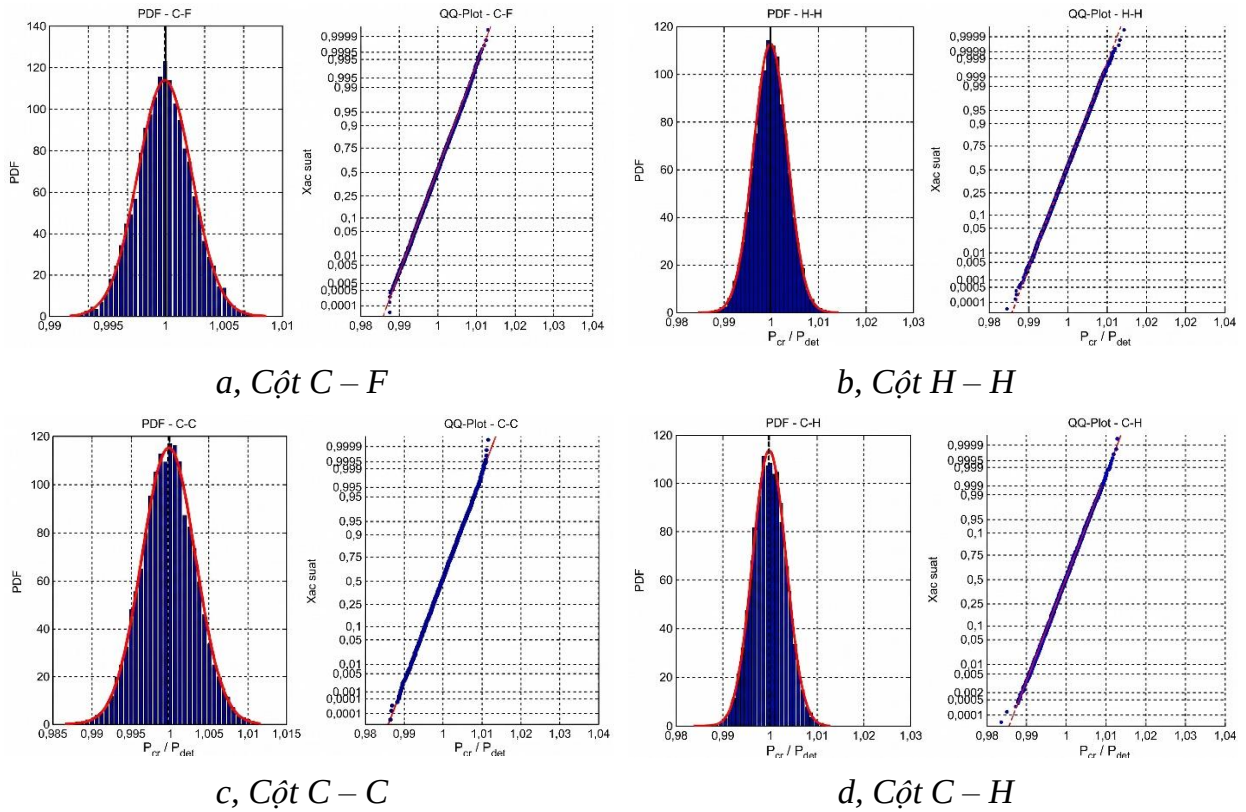
3.4.5. So sánh kết quả phân tích ổn định Euler của cột bằng phần tử hữu hạn ngẫu nhiên với mô phỏng Monte Carlo

Mô phỏng MCS được phát triển độc lập nằm trong nhóm phương pháp thống kê dựa trên kỹ thuật biểu diễn phổ và FEM tiêu chuẩn. Trong đó kỹ thuật phổ biểu diễn trường ngẫu nhiên thỏa mãn các yêu cầu về chiều dài tương quan không gian cũng như phương sai của trường thông qua năng lượng của hàm mật độ phổ. Trong phần này bài toán ổn định

của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian được đưa ra trong mục 3.4.1 được phân tích bằng mô phỏng MCS bằng cách tạo ra $N = 10.000$ mẫu các thể hiện của trường ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi. FEM tiêu chuẩn được sử dụng để phân tích trên tập dữ liệu đầu vào ngẫu nhiên thu được tập hợp lực tới hạn của cột. Xử lý thống kê trên tập dữ liệu thu được các đặc trưng thống kê của tải trọng tới hạn chuẩn hóa. Hình 3.7 và Hình 3.8 thể hiện biểu đồ tần suất của giá trị riêng chuẩn hóa (lực tới hạn chuẩn hóa) và biểu đồ Q-Q của lực tới hạn khi xét đến tính ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi. Trên biểu đồ Q-Q cho thấy phân vị của mẫu khớp tốt với phân vị lý thuyết của phân phối chuẩn. Giá trị lực tới hạn phân bố gần đường tham chiếu và không xuất hiện sai lệch có hệ thống. Đồng thời, hệ số độ lệch và độ nhọn của mẫu xấp xỉ các giá trị tương ứng của phân phối chuẩn. Có thể kết luận rằng lực tới hạn xấp xỉ tuân theo phân phối chuẩn. Giá trị kỳ vọng và COV của lực tới hạn chuẩn hóa được xác định bằng SFEM sai lệch nhỏ với kết quả phân tích bằng MCS được thể hiện trong Hình D.17 đến Hình D.24 trong phụ lục D chứng tỏ sự phù hợp của SFEM đã được phát triển.

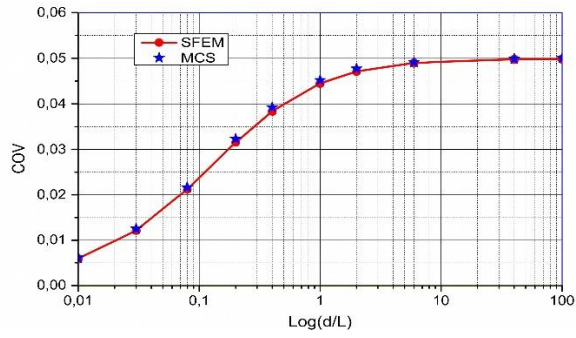


Hình 3.7. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của tải trọng tới hạn chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên hai chiều ($d = 0,01L$)

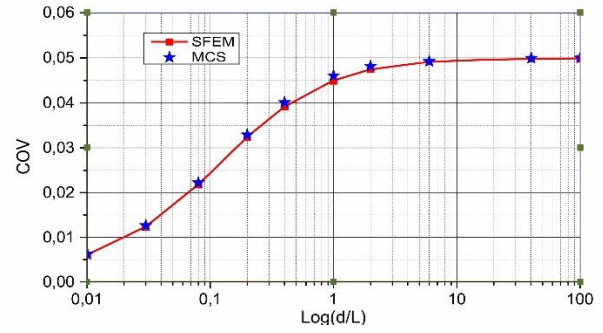


Hình 3.8. Biểu đồ tần suất và biểu đồ Q-Q của tải trọng tới hạn chuẩn hóa trong trường hợp E ngẫu nhiên ba chiều ($d = 0,01L$)

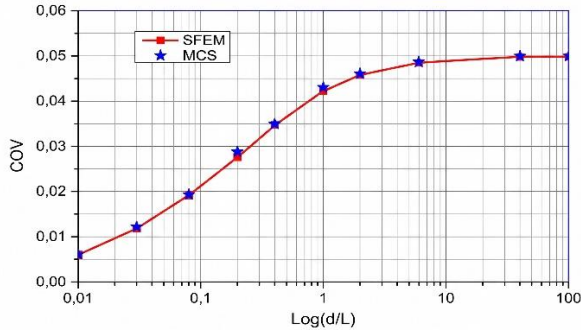
Hình 3.9 và Hình 3.10 chỉ ra kết quả phân tích so sánh COV của lực tới hạn của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều được phân tích bằng SFEM và phương pháp thống kê dựa trên mô phỏng MCS. Kết quả cho thấy ở những chiều dài tương quan không gian nhỏ hơn kích thước đặc trưng của kết cấu tính chất vật liệu biến thiên ngẫu nhiên lớn dẫn đến kết quả phân tích COV bằng phương pháp MCS thường lớn hơn kết quả phân tích COV bằng SFEM. Đồng thời ghi nhận sai lệch giữa hai phương pháp giảm dần khi chiều dài tương quan không gian tăng. Điều này được lý giải khi chiều dài tương quan không gian lớn thì đáp ứng ngẫu nhiên của trường ngẫu nhiên không gian tương đối đồng nhất và gần giống với biến ngẫu nhiên tổng thể. Nhìn chung, sai lệch giữa hai phương pháp độc lập tương đối nhỏ, dưới 5% thể hiện tính chính xác và sự phù hợp của SFEM được đề xuất trong luận án.



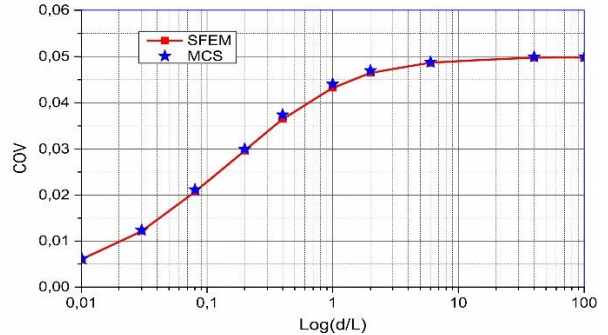
a, Cột C – F, $d_x = d_y = d$



b, Cột H – H, $d_x = d_y = d$

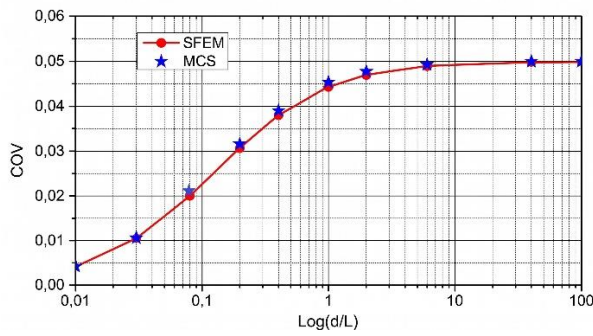


c, Cột C – C, $d_x = d_y = d$

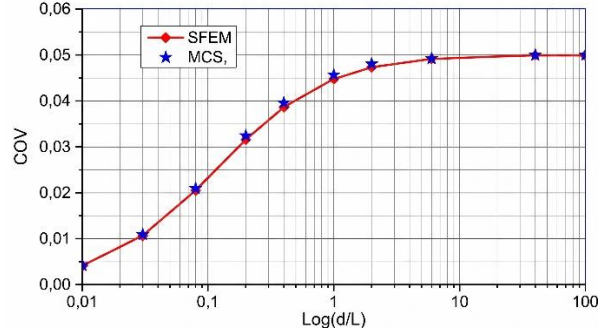


d, Cột C – H, $d_x = d_y = d$

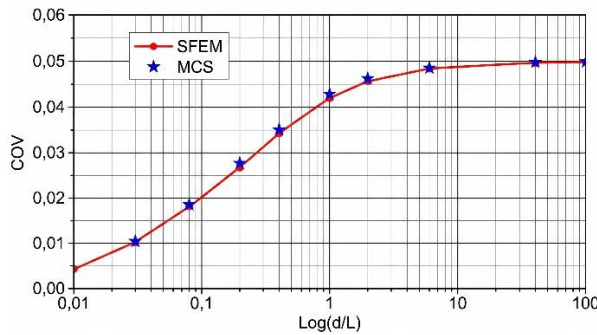
Hình 3.9. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều



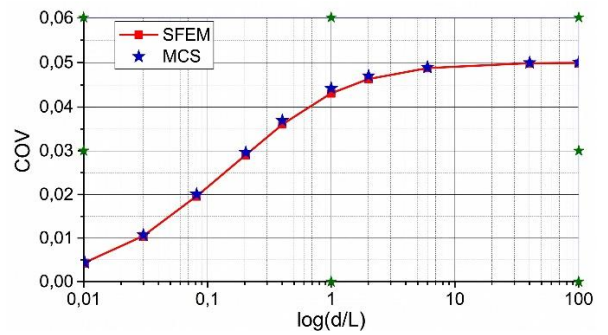
a, Cột C – F, $d_x = d_y = d_z = d$



b, Cột H – H, $d_x = d_y = d_z = d$



c, Cột C – C, $d_x = d_y = d_z = d$



d, Cột C – H, $d_x = d_y = d_z = d$

Hình 3.10. So sánh COV của lực tới hạn được xác định bằng SFEM và MCS trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

3.5. KẾT LUẬN CHƯƠNG III

Kế thừa nền tảng kỹ thuật tích phân trọng số đã được phát triển trong Chương II, khung lý thuyết SFEM đã được mở rộng và phát triển thành công trong Chương III nhằm giải quyết bài toán phân tích ổn định Euler ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm, xét đến sự biến thiên ngẫu nhiên không gian của mô đun đàn hồi E . Các kết quả và đóng góp cốt lõi bao gồm:

Về xây dựng và phát triển phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên

- ✓ **Thiết lập chuỗi xấp xỉ Taylor bậc nhất:** Kỹ thuật nhiễu loạn đã được tích hợp thành công để thiết lập chuỗi xấp xỉ Taylor bậc nhất cho tải trọng tới hạn. Kỹ thuật này cho phép lan truyền trực tiếp tính bất định không gian của tính chất vật liệu vào đáp ứng ổn định Euler ngẫu nhiên của cột.
- ✓ **Xác định đặc trưng thống kê:** Mô hình SFEM được phát triển cho phép xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê bậc thấp của lực tới hạn (kỳ vọng, phương sai, COV) mà không cần thực hiện mô phỏng lặp lại nhiều lần.

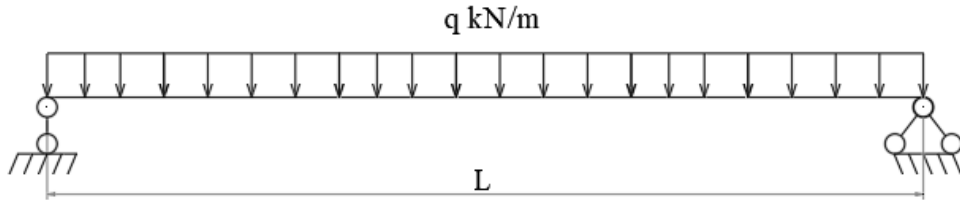
Về kiểm chứng độ tin cậy và tính chính xác: Mô hình SFEM cho bài toán ổn định Euler ngẫu nhiên của cột đã được kiểm định nghiêm ngặt qua các tiêu chí:

- ✓ **Sự hội tụ:** Kết quả phân tích chỉ ra rằng COV của lực tới hạn hội tụ ổn định và hoàn toàn không phụ thuộc vào mật độ lưới chia khi số lượng phần tử đạt ngưỡng đủ lớn.
- ✓ **Tính nhất quán với lý thuyết tính toán ngẫu nhiên:** Khi độ biến thiên của thông số đầu vào tiến về không, đáp ứng ngẫu nhiên của cột tiệm cận chính xác về kết quả của bài toán tất định, phản ánh đúng bản chất vật lý và cơ học của hệ thống.
- ✓ **Độ chính xác:** Quá trình đối sánh chéo với các nghiên cứu trước và phương pháp mô phỏng MCS cho thấy mức độ sai lệch kết quả nhỏ hơn 5% khẳng định tính chính xác và độ tin cậy của mô hình SFEM được phát triển.

CHƯƠNG IV: KHẢO SÁT ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC YẾU TỐ TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN ĐẶC TRƯNG THỐNG KÊ ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT

4.1. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐÁP ỨNG TÌNH NGẪU NHIÊN CỦA DÀM CÓ MÔ ĐUN ĐÀN HỒI NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

Xét dầm giản đơn có chiều dài nhịp $L = 5 \text{ m}$, mặt cắt ngang hình chữ nhật có chiều cao $h = 0,4 \text{ m}$, bề rộng $b = 0,25 \text{ m}$. Dầm chịu tải trọng phân bố đều $q = 10 \text{ kN/m}$. Dầm có E và ρ thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều) có hàm tự tương quan như các phương trình (4.1) - (4.6). Với giá trị kỳ vọng của E và ρ lần lượt: $E_0 = 30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho_0 = 2400 \text{ kg/m}^3$. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên không gian 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Các chiều dài tương quan theo các trục trong không gian thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$.



Hình 4.1. Sơ đồ dầm giản đơn

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (4.1)$$

$$R_{ff}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (4.2)$$

$$R_{gg}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_g^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (4.3)$$

$$R_{gg}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sigma_g^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (4.4)$$

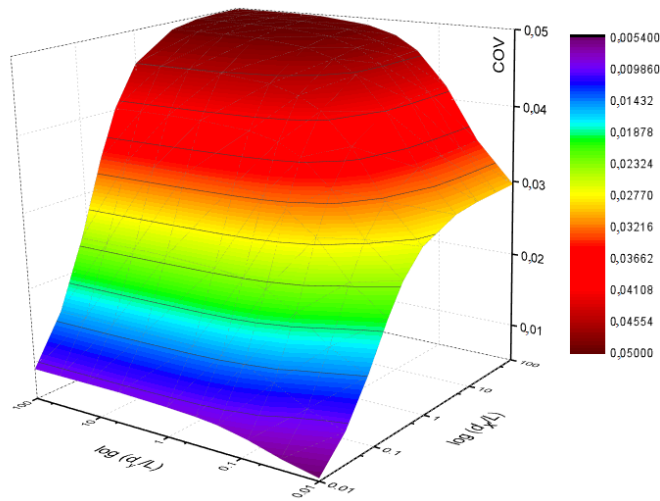
$$R_{fg}(\xi_1, \xi_2) = \gamma \sigma_f \sigma_g \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (4.5)$$

$$R_{fg}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \gamma \sigma_f \sigma_g \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (4.6)$$

4.1.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến ứng xử tĩnh của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên

4.1.1.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

Để khảo sát ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo trục x và chiều dài tương quan theo trục y đến COV của chuyển vị. Trong nghiên cứu này các chiều dài tương quan theo các trục được cho thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$. Kết quả khảo sát được thể hiện trong Hình 4.2. Có thể nhận thấy rằng giá trị của COV của chuyển vị có xu hướng tăng khi chiều dài tương quan không gian tăng. Tuy nhiên mức tăng của COV khác nhau tương ứng với các độ lớn khác nhau của chiều dài tương quan. Cụ thể, ở những giá trị của chiều dài tương quan nhỏ thì COV của chuyển vị tăng mạnh khi chiều dài tương quan tăng. Mức độ tăng của COV của chuyển vị gần như là tuyến tính với chiều dài tương quan. Khi chiều dài tương quan lớn hơn kích thước dầm thì COV của chuyển vị tiếp tục tăng khi chiều dài tương quan tăng nhưng mức độ tăng của COV lại gần như không đáng kể. Đặc biệt, khi chiều dài tương quan có xu hướng vô cùng thì COV có xu hướng tiệm cận đến giá trị độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên.

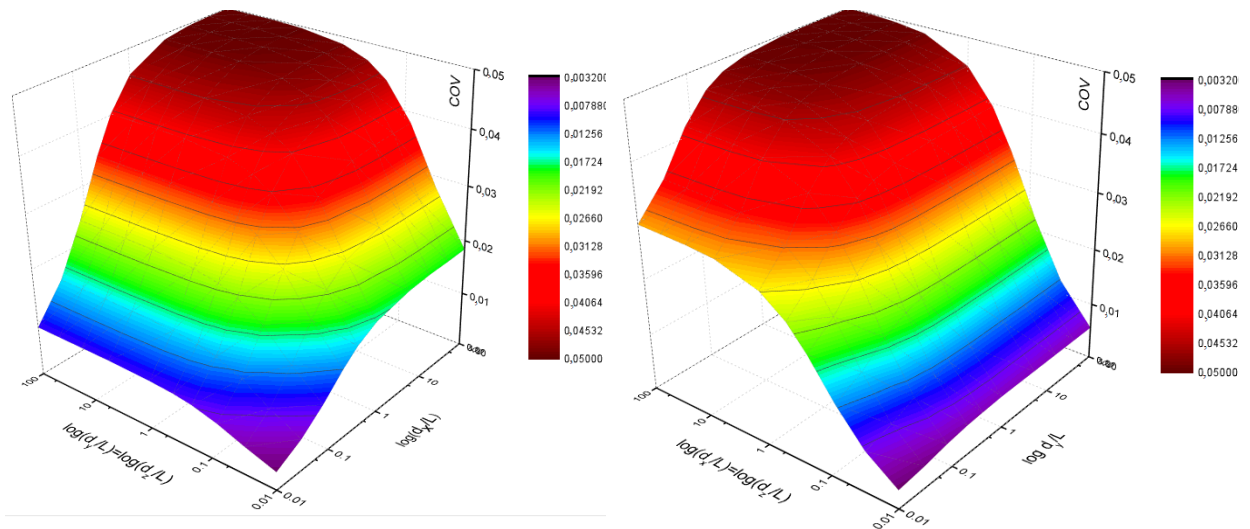


Hình 4.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian hai chiều đến COV của chuyển vị

4.1.1.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

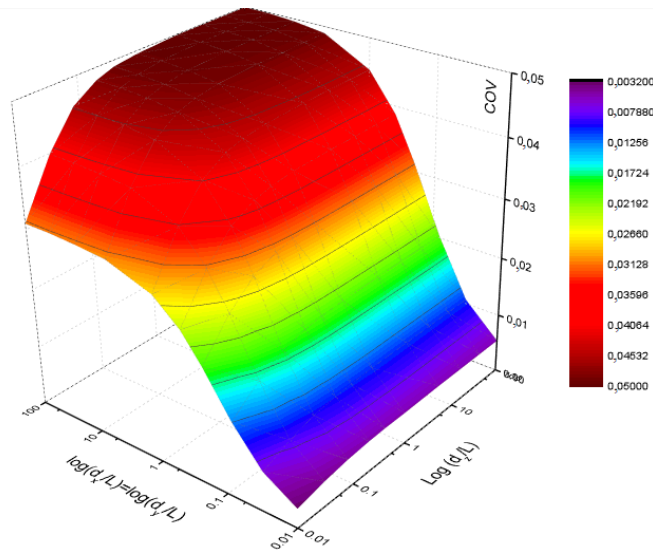
Để khảo sát ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo các trục trong không gian đến COV của chuyển vị nút tại giữa nhịp trong nghiên cứu này ba trường hợp của chiều dài tương quan được nghiên cứu bao gồm: $d_x = d, d_y = d_z = d$; $d_y = d, d_x = d_z = d$; $d_z = d, d_x = d_y = d$ với d thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$ tương ứng với trường hợp $\sigma_f = 0,05$. Kết quả nghiên cứu và khảo sát ảnh hưởng được thể hiện trong Hình 4.3. Kết quả chỉ ra rằng COV của chuyển vị có xu hướng tương tự nhau trong tất cả các trường hợp được khảo sát. Cụ thể,

COV có giá trị nhỏ tương ứng giá trị của chiều dài tương quan nhỏ và COV có giá trị lớn tương ứng chiều dài tương quan lớn. Mức độ tăng của COV tương ứng với các chiều dài tương quan khác nhau là khác nhau. Ví dụ như trong trường hợp $d_x = d_y = d_z = d$ khi chiều dài tương quan tăng gấp 2,67 lần từ $0,03L$ đến $0,08L$ thì COV của chuyển vị tăng 2,15 lần, tương ứng với COV tăng từ 0,0086 lên 0,0185. Cũng trong trường hợp chiều dài tương quan d tăng 2,5 lần từ $40L$ đến $100L$ thì COV tăng gần như không đáng kể xấp xỉ bằng 1,002 lần tương ứng tăng từ 0,0498 lên đến 0,0499. Đặc biệt, một lần nữa ghi nhận xu hướng tăng của COV tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi khi chiều dài tương quan có xu hướng vô cùng.



a, $d_x = d, d_y = d_z = d$

b, $d_y = d, d_x = d_z = d$



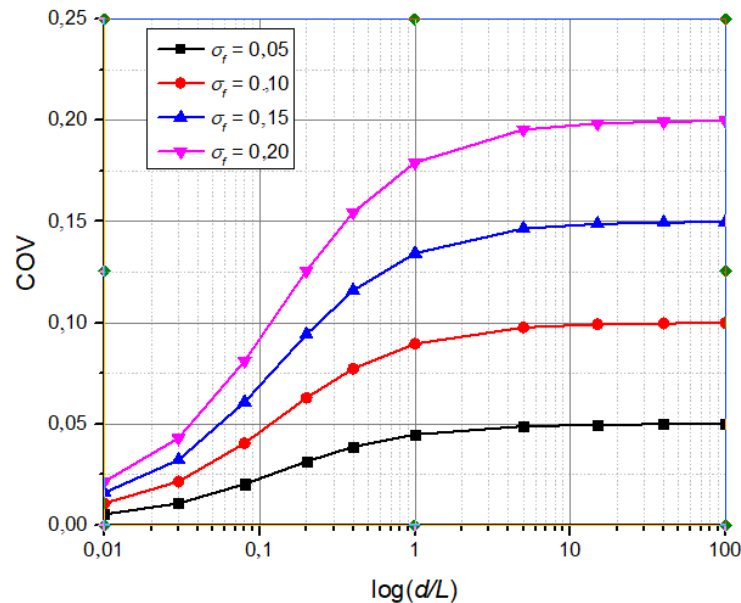
c, $d_z = d, d_x = d_y = d$

Hình 4.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian ba chiều đến COV của chuyển vị

4.1.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên của chuyển vị

4.1.2.1. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

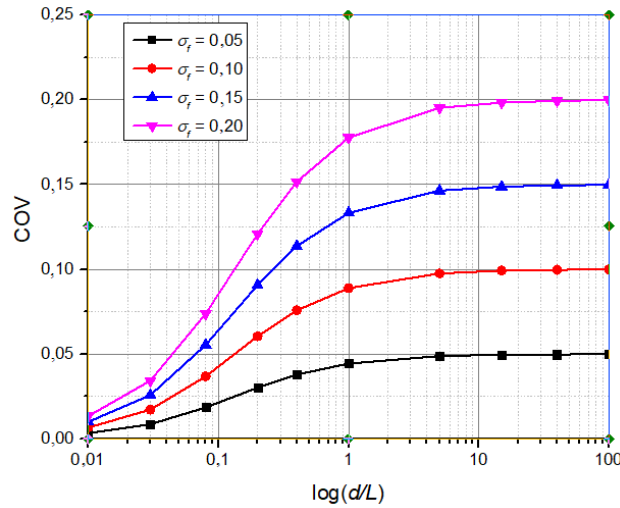
Hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi chính bằng độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên đầu vào. Để nghiên cứu ảnh hưởng của hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến COV của chuyển vị, trong nghiên cứu này độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên σ_f được cho thay đổi từ 0,00 đến 0,20 và chiều dài tương quan theo các trục được xem xét: $d_x = d_y = d$ với d thay đổi từ 0,01L đến 100L. Kết quả khảo sát được thể hiện trong Hình 4.4. COV của chuyển vị có xu hướng tăng khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên tăng. Đồng thời cũng nhận thấy rằng mức tăng của COV tăng cùng với mức tăng của chiều dài tương quan và σ_f . COV có mối tương quan dương với độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên cũng chính là COV của mô đun đàn hồi ở tất cả các độ lớn khác nhau của chiều dài tương quan.



Hình 4.4. Ảnh hưởng của σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của chuyển vị

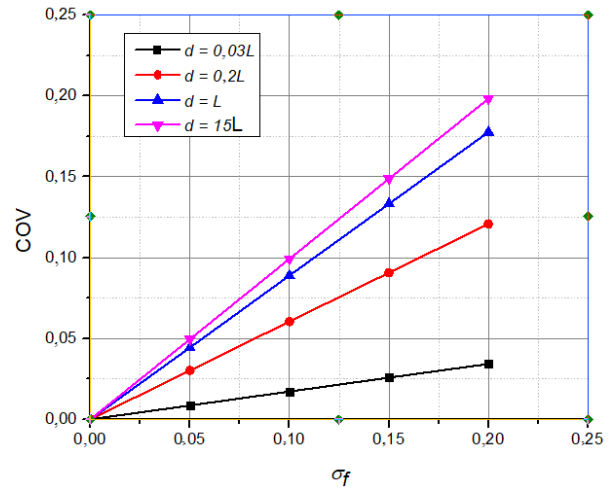
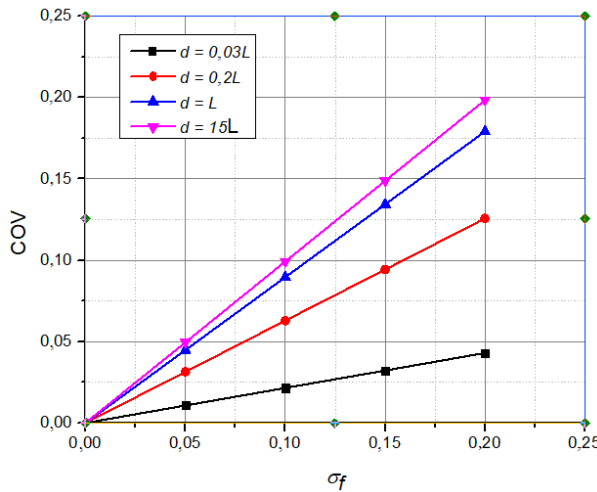
4.1.2.2. Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Trong nghiên cứu này để khảo sát ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của chuyển vị thì độ lệch chuẩn σ_f được lấy tương ứng với bốn trường hợp bao gồm: 0,05; 0,10; 0,15; 0,20 và chiều dài tương quan thay đổi từ 0,01L đến 100L. Kết quả nghiên cứu ảnh hưởng được thể hiện trong Hình 4.5. Kết quả phân tích cho thấy mối tương quan dương giữa độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều và COV của chuyển vị, đồng thời thể hiện xu hướng tăng của COV ở những chiều dài tương quan khác nhau.



Hình 4.5. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của chuyển vị

4.1.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của chuyển vị và hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian



a, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

b, Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

Hình 4.6. Quan hệ giữa COV của chuyển vị và COV của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên

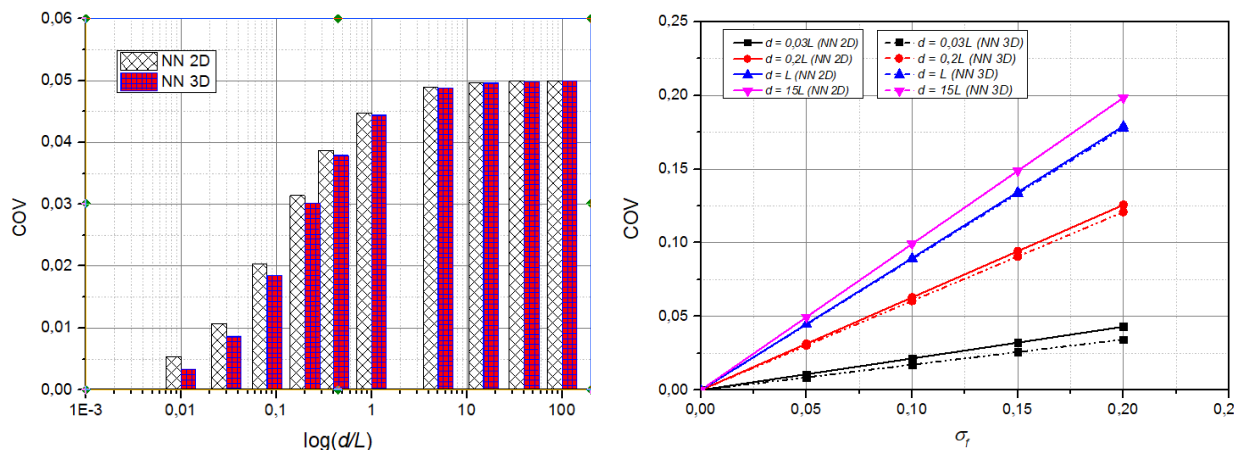
Hình 4.6 thể hiện kết quả khảo sát của quan hệ giữa COV và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều (COV của mô đun đàn hồi) tương ứng với bốn trường hợp của chiều dài tương quan trong trường hợp ngẫu nhiên hai chiều: $d_x = d_y = d$ với $d = 0,03L$, $d = 0,2L$, $d = 1L$ và $d = 15L$. Tương tự trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều: $d_x = d_y = d_z = d$ với $d = 0,03L$, $d = 0,2L$, $d = 1L$ và $d = 15L$. Trong tất cả các trường hợp khảo sát, kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng COV chuyển vị tăng gần như là tuyến tính với độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên. Mối quan hệ tuyến tính này phản ánh xu hướng lan truyền thống kê gần như tỉ lệ giữa độ không chắc chắn của tham số vật liệu và độ không

chắc chắn của đáp ứng. Nhờ đó, có thể dự đoán được đặc trưng đáp ứng ngẫu nhiên của dầm khi biết trước các đặc trưng thống kê của các yếu tố đầu vào ngẫu nhiên.

4.1.4. So sánh ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Hình 4.7 minh họa sự khác biệt trong ứng xử tĩnh ngẫu nhiên của dầm khi mô đun đàn hồi được mô tả bởi trường ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều, với các chiều dài tương quan không gian theo các trục được giả thiết bằng nhau và thay đổi trong khoảng từ $0,01L$ đến $100L$. Khi chiều dài tương quan trong không gian nhỏ, trường ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi biến đổi mạnh và thay đổi nhanh trong phạm vi không gian, khiến vật liệu có thể được xem như bao gồm nhiều thể tích ngẫu nhiên gần như độc lập. Sự đóng góp trung bình của các thể tích ngẫu nhiên này làm cho hiệu ứng trung bình hóa thống kê thể hiện rõ rệt, dẫn đến mức độ phân tán của chuyển vị dầm trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều nhỏ hơn so với trường hợp hai chiều.

Ngược lại, khi chiều dài tương quan lớn hơn kích thước đặc trưng của dầm, trường ngẫu nhiên trở nên gần như đồng nhất trong không gian, và cả hai trường hợp ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều đều có xu hướng đáp ứng ngẫu nhiên tương tự như một biến ngẫu nhiên toàn cục. Khi đó, sự khác biệt trong đặc trưng thống kê của chuyển vị giữa hai mô hình là rất nhỏ, thể hiện xu hướng hội tụ của đáp ứng ngẫu nhiên.



a, Ảnh hưởng của chiều dài tương quan trường ngẫu nhiên đến COV

b, Quan hệ giữa σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều, ba chiều và COV của chuyển vị

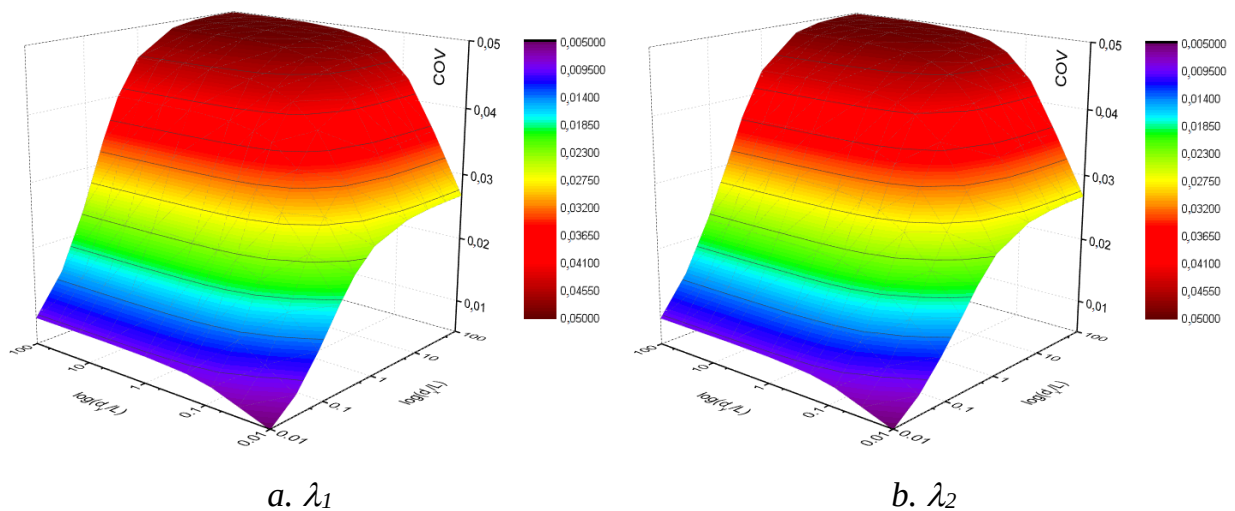
Hình 4.7. So sánh ứng xử tĩnh của dầm trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

4.2. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ĐẶC TRƯNG ĐỘNG LỰC HỌC TUYẾN TÍNH CỦA DẦM CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

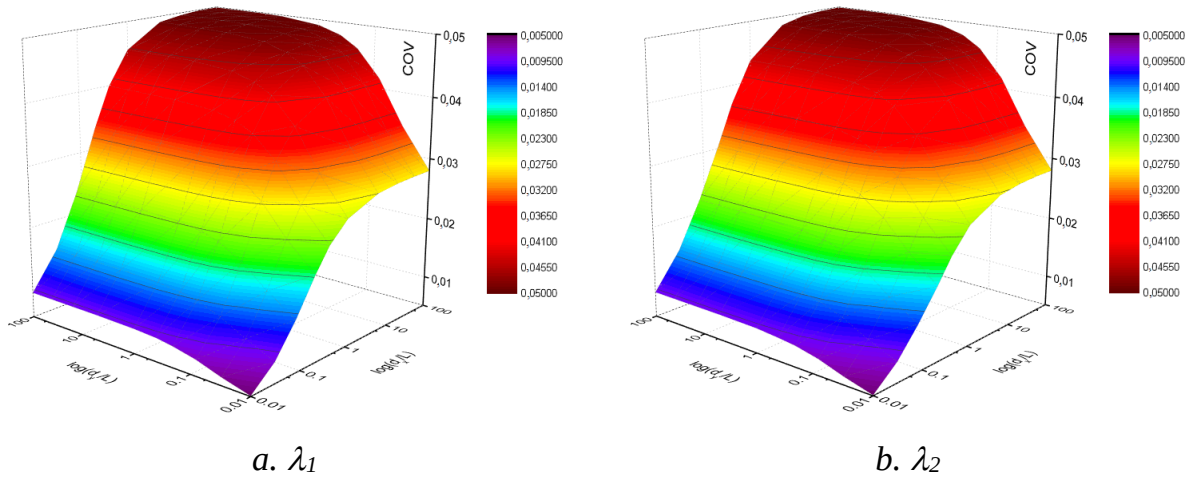
4.2.1. Phân tích ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến hệ số biến thiên giá trị riêng

4.2.1.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

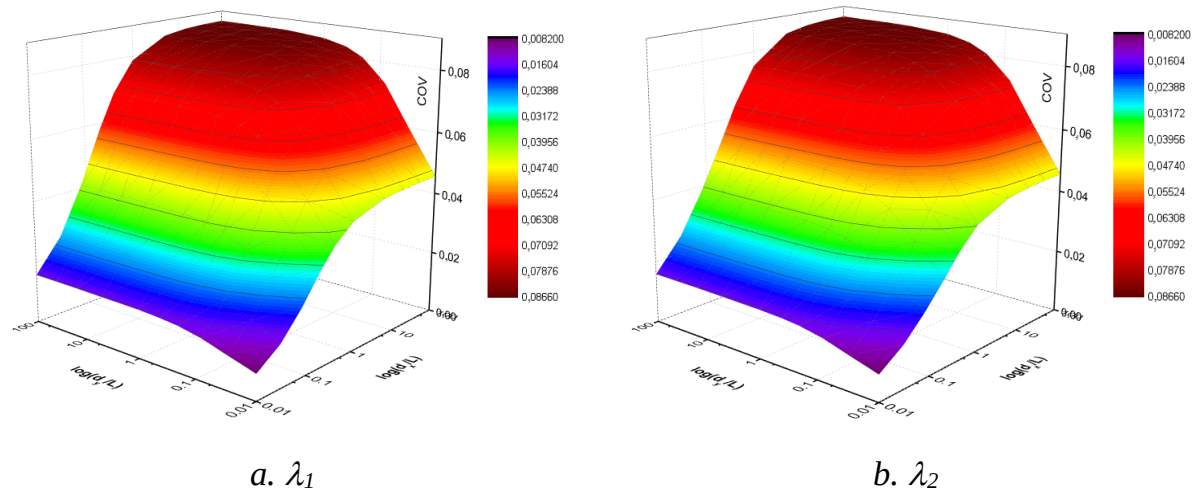
Chiều dài tương quan trong không gian hai chiều được thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$ để khảo sát ảnh hưởng đến COV của giá trị riêng. Độ lệch chuẩn $\sigma_f = \sigma_g = 0,05$ với các trường hợp ngẫu nhiên: (i) dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều, (ii) dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều, (iii) dầm có E và ρ ngẫu nhiên hai chiều với ba trường hợp: $\gamma = -0,5$; $\gamma = 0$; $\gamma = 0,5$. Kết quả nghiên cứu COV được thể hiện trong các hình từ Hình 4.8 đến Hình 4.12, cho thấy COV của giá trị riêng xu hướng tăng khi chiều dài tương quan không gian tăng. Ở vùng có chiều dài tương quan nhỏ, COV tăng mạnh và gần như tuyến tính theo chiều dài tương quan. Tuy nhiên, khi chiều dài tương quan trở nên rất lớn (tiến tới vô cùng), COV tiếp tục tăng nhưng với tốc độ chậm dần, cho thấy đáp ứng ngẫu nhiên của dầm dần hội tụ về trạng thái tương ứng với một biến ngẫu nhiên.



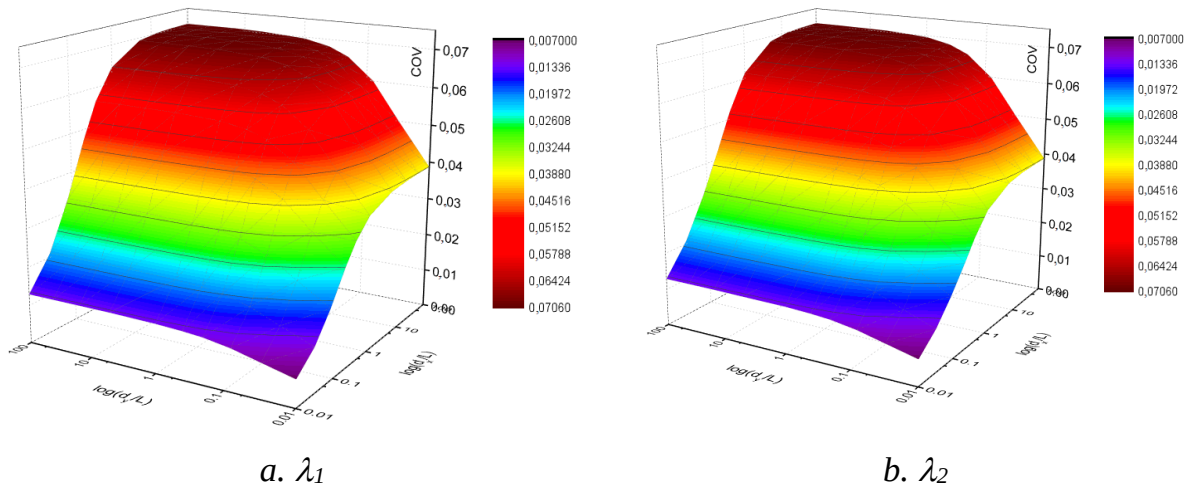
Hình 4.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều



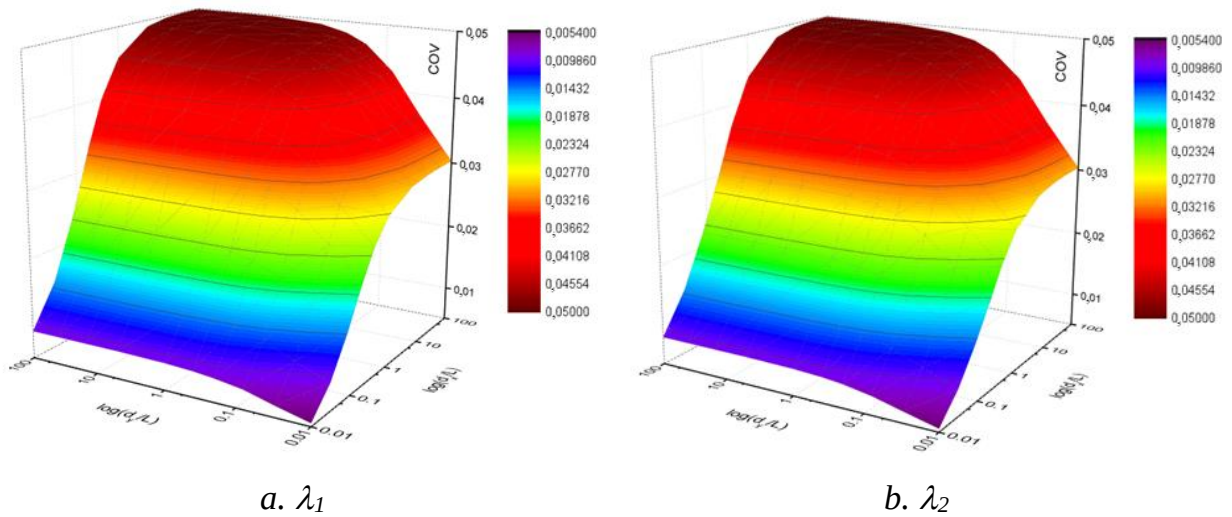
Hình 4.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều



Hình 4.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($\gamma = -0,5$)



Hình 4.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($\gamma = 0$)



Hình 4.12. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều ($\gamma = 0,5$)

4.2.1.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Để phân tích sâu hơn ảnh hưởng của chiều dài tương quan trong không gian ba chiều, nghiên cứu tiếp tục xem xét các trường hợp chiều dài tương quan theo các trục khác nhau, bao gồm: $d_x = d_y$, $d_y = d_z$, $d_x = d_z$. Đồng thời kết cấu dầm với tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều bao gồm: Dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều, dầm có E và ρ ngẫu nhiên ba chiều. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan không gian theo các trục đến COV được thể hiện trong các Hình A.1 đến Hình A.15 trong phụ lục A. Phân tích kết quả cho thấy khi chiều dài tương quan nhỏ, các giá trị riêng biến thiên rất ít xung quanh giá trị kỳ vọng. Ngược lại, khi chiều dài tương quan tăng, trường ngẫu nhiên trở nên đồng nhất hơn, làm giảm hiệu ứng trung bình hóa thống kê, dẫn đến biến thiên của giá trị riêng lớn hơn, tức là COV tăng theo chiều dài tương quan. Ngoài ra, có thể nhận thấy rằng ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo phương x , phương chịu lực chính của dầm, là đáng kể nhất đối với sự biến thiên của giá trị riêng so với hai phương còn lại.

Phương x là phương dọc theo chiều dài cấu kiện và đồng thời là phương chính trong phân bố trường ngẫu nhiên của E và ρ . Khi chiều dài tương quan theo phương này thay đổi, sự phân bố cứng, mềm của vật liệu dọc theo chiều dài dầm thay đổi đáng kể, ảnh hưởng trực tiếp đến độ cứng tổng thể và phân bố khối lượng tham gia dao động. Do đó, biến thiên của các giá trị riêng thay đổi nhạy hơn so với sự biến đổi của chiều dài tương quan theo các phương còn lại. Nói cách khác, tác động của ngẫu nhiên dọc trục dầm chi phối chủ yếu đáp ứng dao động của toàn kết cấu dầm, khiến COV của giá trị riêng bị ảnh hưởng mạnh nhất theo phương này.

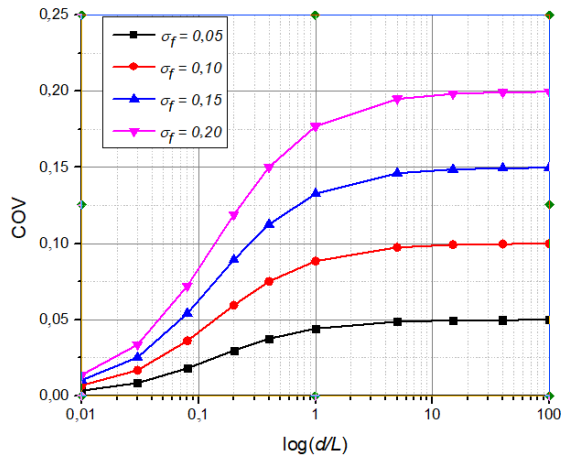
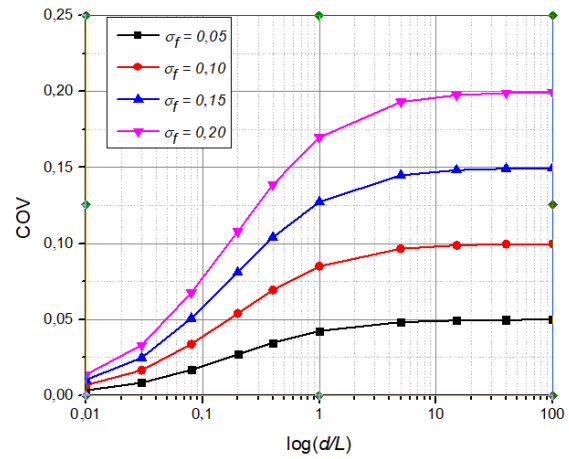
4.2.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng

4.2.2.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

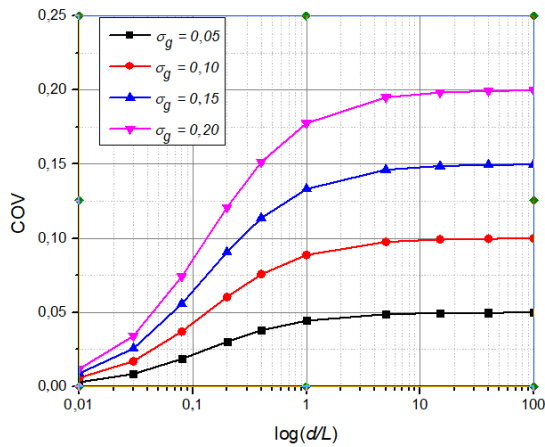
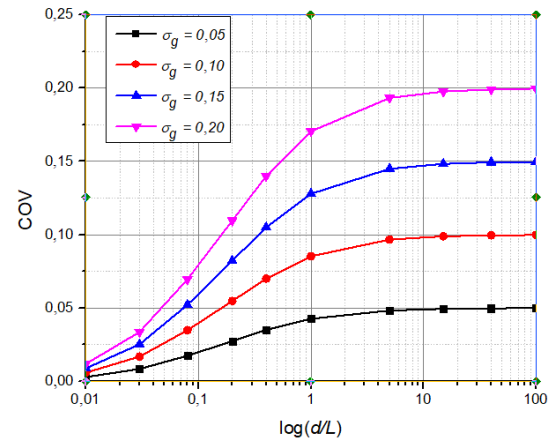
Hình C.1 đến Hình C.7 trong phụ lục C trình bày ảnh hưởng của độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên cũng chính là hệ số biến thiên của tính chất vật liệu đến COV giá trị riêng. Các kết quả phân tích chỉ ra rằng tồn tại một mối tương quan dương giữa độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên và COV. COV có xu hướng tăng cùng với sự gia tăng của độ lệch chuẩn của các yếu tố ngẫu nhiên. Trong trường hợp dầm chỉ có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều của E hoặc ρ , COV tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên đầu vào khi chiều dài tương quan tiến đến vô cùng. Hơn nữa, giả sử một mối tương quan âm hoàn hảo giữa các trường ngẫu nhiên của E và ρ , COV tiệm cận đến tổng của độ lệch chuẩn của chúng ở chiều dài tương quan lớn. Ảnh hưởng đáng kể của các thành phần ngẫu nhiên của ma trận $[K]$ và ma trận $[M]$ so với các thành phần tất định của $[K]$ và $[M]$ được thể hiện rõ ràng trong sự biến thiên đáng kể của COV đối với một mối tương quan hoàn toàn âm ($\gamma = -1,0$). Ngược lại, một mối tương quan hoàn toàn dương ($\gamma = +1,0$), ảnh hưởng ngẫu nhiên tổng hợp của chúng lên đáp ứng dao động bị triệt tiêu dẫn đến sự biến thiên không đáng kể trong đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu dầm. Trong trường hợp các trường ngẫu nhiên của tính chất vật liệu độc lập thống kê với nhau, COV tiệm cận đến 1,4 lần độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên (với $\sigma_f = \sigma_g$) khi chiều dài tương quan rất lớn.

4.2.2.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

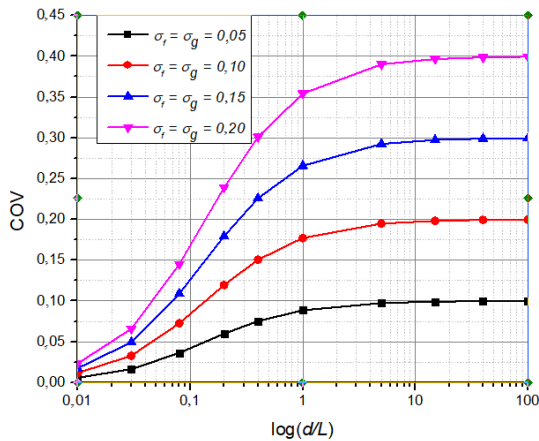
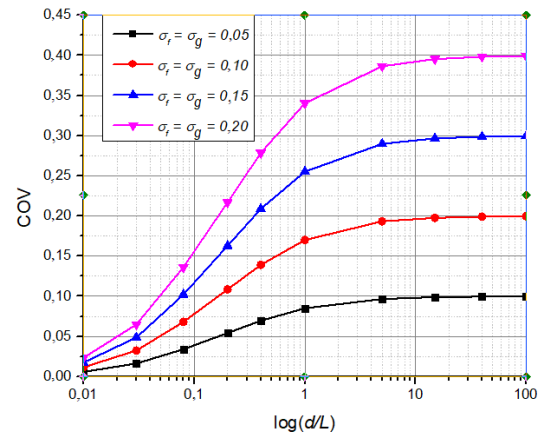
Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều và chiều dài tương quan đến COV của giá trị riêng được khảo sát. Trường ngẫu nhiên của E và ρ được giả định tương ứng với các giá trị thay đổi: 0,05; 0,10; 0,15, và 0,20. Đồng thời chiều dài tương quan theo các trục trong không gian $d_x = d_y = d_z = d$. Kết quả phân tích được thể hiện trong các Hình 4.13 đến Hình 4.19. Giá trị riêng có xu hướng động tăng xung quanh giá trị kỳ vọng khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên đầu vào tăng hoặc chiều dài tương quan tăng. Khi chiều dài tương quan đạt giá trị rất lớn thì COV có xu hướng tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên trong trường hợp dầm chỉ có E hoặc ρ ngẫu nhiên ba chiều. Trong trường hợp dầm có E và ρ ngẫu nhiên ba chiều có mối tương quan âm tuyệt đối thì khi chiều dài tương quan theo các trục trong không gian có xu hướng vô cùng thì COV của giá trị riêng có xu hướng tiệm cận đến tổng độ lệch chuẩn các trường ngẫu nhiên. Trong khi các trường ngẫu nhiên là độc lập thống kê thì giá trị mà COV tiệm cận đến 70% tổng độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên.

a. λ_1 b. λ_2

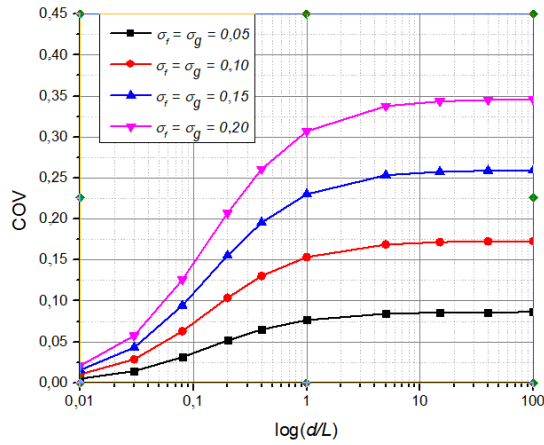
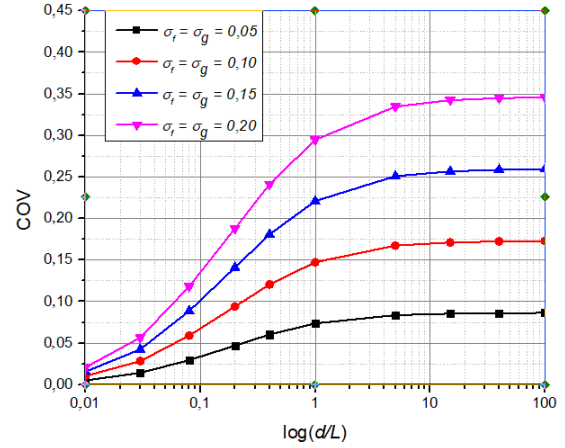
Hình 4.13. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên)

a. λ_1 b. λ_2

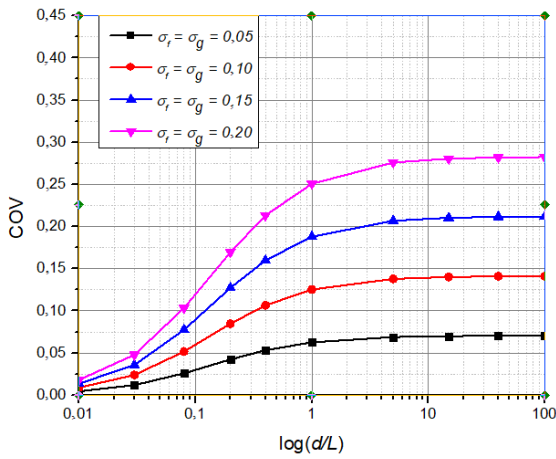
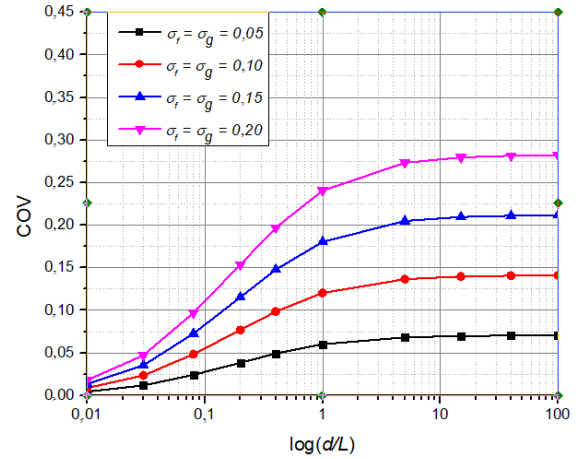
Hình 4.14. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên)

a. λ_1 b. λ_2

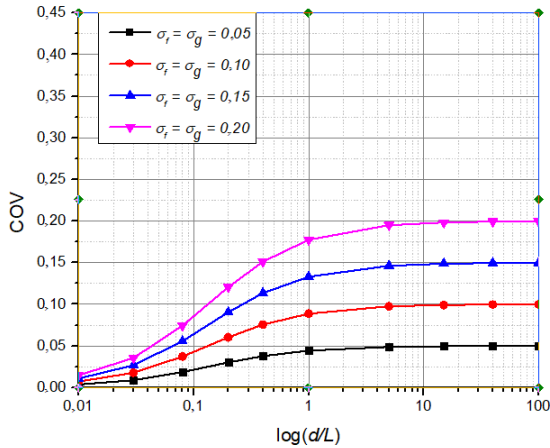
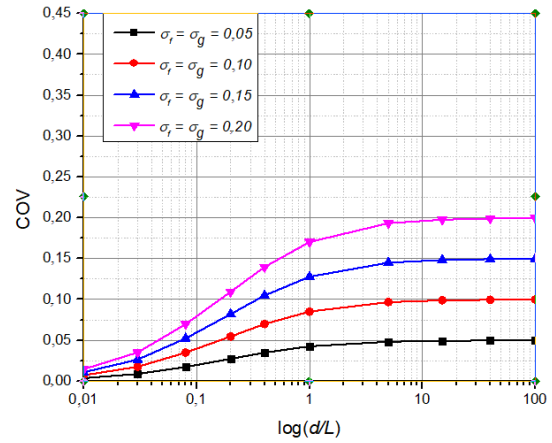
Hình 4.15. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -1,0$)

a. λ_1 b. λ_2

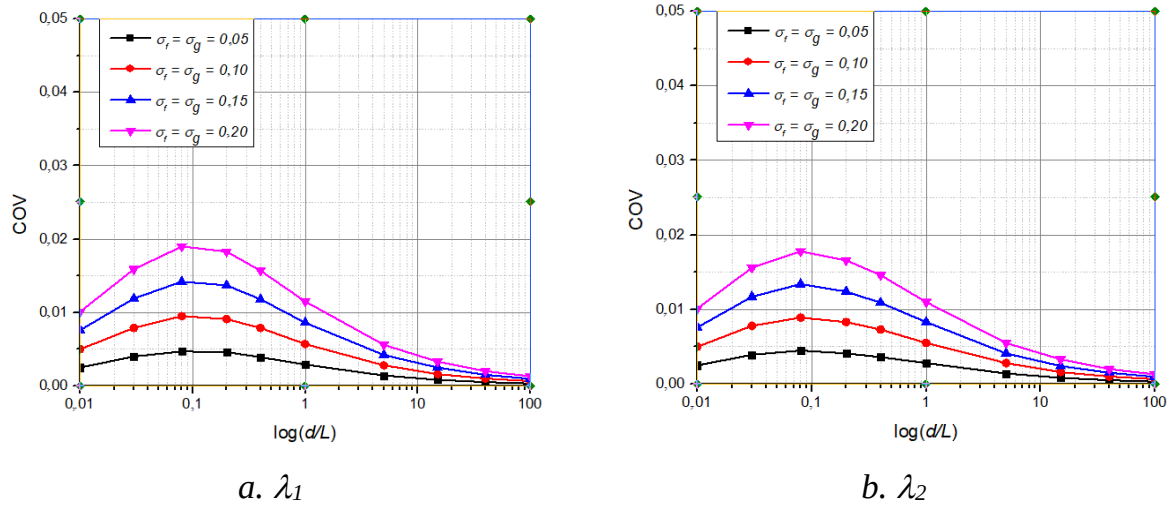
Hình 4.16. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -0,5$)

a. λ_1 b. λ_2

Hình 4.17. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0$)

a. λ_1 b. λ_2

Hình 4.18. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0,5$)



Hình 4.19. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 1,0$)

4.2.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên của giá trị riêng và hệ số biến thiên của tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian

4.2.3.1. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều

Quan hệ giữa COV của giá trị riêng và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều cũng chính là COV của tính chất vật liệu được thể hiện trong các Hình B.1 đến Hình B.5 trong phụ lục B. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều được khảo sát tương ứng với các giá trị: 0; 0,05; 0,10; 0,15, và 0,20. Chiều dài tương quan theo các trục được xem xét tương ứng với bốn trường hợp: $d_x = d_y = 0,03L$; $d_x = d_y = 0,2L$; $d_x = d_y = 1L$; $d_x = d_y = 15L$. Trong trường hợp dầm chỉ có E hoặc ρ ngẫu nhiên hai chiều thì COV của giá trị riêng và COV của tính chất vật liệu đầu vào có quan hệ tuyến tính. Điều này cho thấy mức độ lan truyền bất định từ đầu vào đến đầu ra mang tính tuyến tính khi chỉ có một nguồn ngẫu nhiên chi phối.

4.2.3.2. Tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều

Quan hệ giữa COV của giá trị riêng và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều được khảo sát trong các trường hợp của chiều dài tương quan bao gồm: $d_x = d_y = d_z = 0,03L$; $d_x = d_y = d_z = 0,2L$; $d_x = d_y = d_z = 1L$ và $d_x = d_y = d_z = 15L$. Đồng thời ba trường hợp ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu cũng được nghiên cứu trong phần này bao gồm: Dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều, dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều và dầm có đồng thời cả mô đun và mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều. Các trường ngẫu nhiên được xem xét là các trường ngẫu nhiên dừng có giá trị kỳ vọng bằng không. Do vậy có thể coi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên bằng với COV của

yếu tố ngẫu nhiên đầu vào. Kết quả phân tích được thể hiện trong các Hình B.6 đến Hình B.10 trong phụ lục B. Khi đầm chỉ có E hoặc ρ ngẫu nhiên ba chiều thì ghi nhận được quan hệ tuyến tính của COV của yếu tố ngẫu nhiên đầu vào và COV của trị riêng. Trong trường hợp đầm có đồng thời E và ρ ngẫu nhiên ba chiều thì quan hệ giữa COV của giá trị riêng và COV của yếu tố ngẫu nhiên đầu vào là phi tuyến rất nhỏ có thể coi gần như tuyến tính.

4.2.4. Phân tích ảnh hưởng mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu đến hệ số biến thiên giá trị riêng

Trong mục này, ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên của E và ρ đến COV của giá trị riêng được phân tích chi tiết. Hệ số tương quan giữa hai trường ngẫu nhiên tương ứng với năm trường hợp: $\gamma = -1,0$; $\gamma = -0,5$; $\gamma = 0,0$; $\gamma = +0,5$; $\gamma = +1,0$. Trong các phân tích này, độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên được lấy bằng: 0,05; 0,10; 0,15; 0,20 trong khi chiều dài tương quan không gian bằng d được thay đổi trong khoảng từ 0,01L đến 100L. Kết quả phân tích được trình bày trong các Hình C.8 đến Hình C.11 tại phụ lục C đối với trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và trong các Hình C.12 đến Hình C.15 trong phụ lục C đối với trường hợp tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều.

Kết quả phân tích có thể cho thấy được COV của giá trị riêng có xu hướng giảm khi hệ số tương quan chéo giữa trường ngẫu nhiên E và ρ tăng. COV đạt giá trị lớn nhất khi $\gamma = -1,0$ tức là trong trường hợp hai trường ngẫu nhiên tương quan âm hoàn toàn, và đạt giá trị nhỏ nhất (không đáng kể) $\gamma = +1,0$ tương ứng với mối tương quan dương hoàn toàn. Khi chiều dài tương quan trong không gian có xu hướng tiến đến vô cùng, COV của giá trị riêng tiệm cận đến hai lần độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên trong trường hợp tương quan âm tuyệt đối.

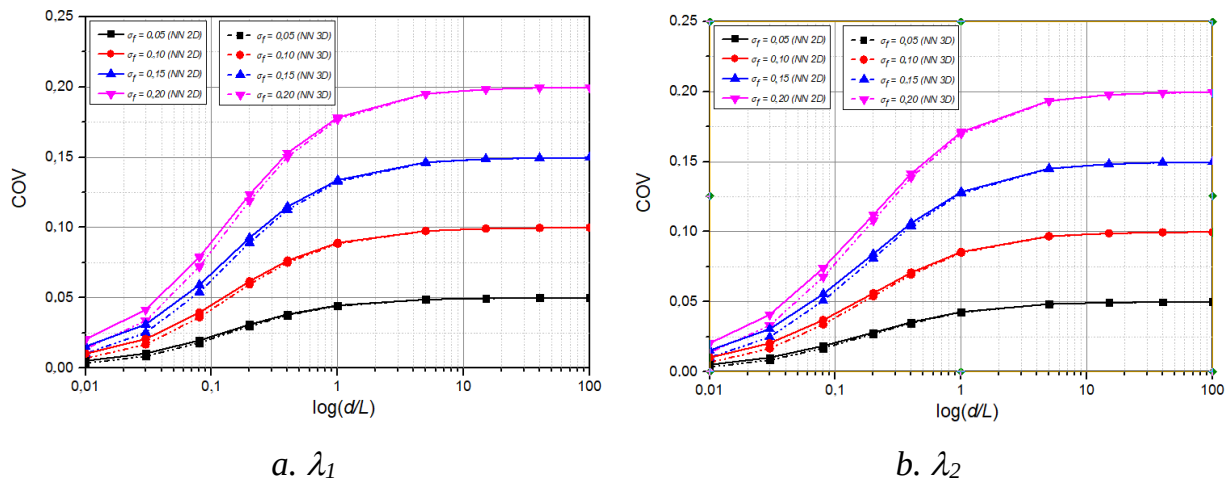
Về mặt cơ học, hiện tượng này có thể được lý giải thông qua sự tương tác giữa ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của đầm. Cả hai ma trận này đều gồm thành phần có tính tất định và thành phần mang tính ngẫu nhiên. Khi các phần ngẫu nhiên của hai ma trận có mối tương quan âm hoàn hảo, sự biến thiên trong độ cứng và khối lượng diễn ra theo chiều ngược nhau, dẫn đến biến động cực đại của giá trị riêng. Ngược lại, khi các phần ngẫu nhiên tương quan dương hoàn hảo, biến thiên của độ cứng và khối lượng có xu hướng triệt tiêu lẫn nhau, làm giảm đáng kể biến thiên của giá trị riêng, khiến COV trở nên nhỏ và gần như không đáng kể.

Kết quả khảo sát và phân tích chỉ ra rằng mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên vật liệu là một yếu tố được xác định có ảnh hưởng rõ rệt đến ứng xử động ngẫu nhiên của đầm. Việc giả định bỏ qua hoặc xác định không chính xác hệ số tương quan giữa các

trường E và ρ có thể dẫn đến đánh giá sai lệch về độ bất định của các giá trị riêng. Do đó, trong các phân tích dao động ngẫu nhiên của dầm, việc xét đến đầy đủ mối tương quan của các trường vật liệu là cần thiết để đảm bảo tính chính xác và độ tin cậy của mô hình.

4.2.5. So sánh phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

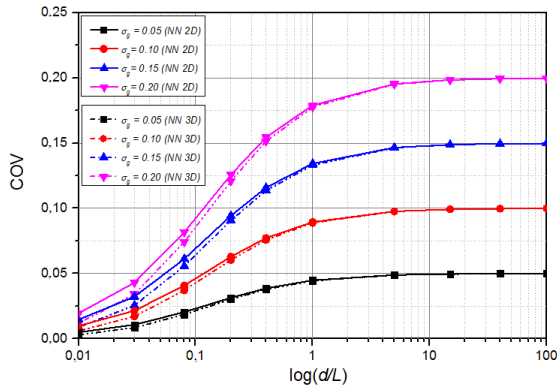
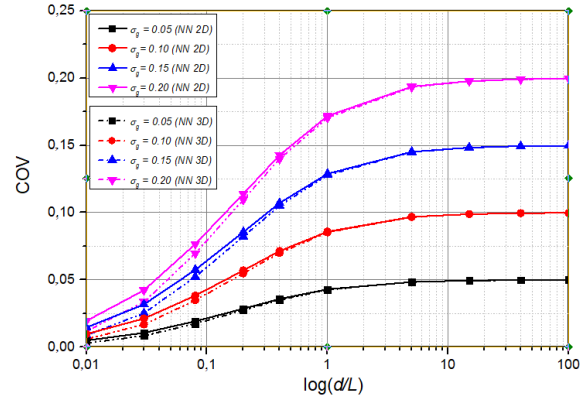
Trong phần này, phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính của dầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều được so sánh nhằm đánh giá ảnh hưởng của số chiều ngẫu nhiên đến mức độ bất định của giá trị riêng. Các trường hợp khảo sát bao gồm: (i) dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều; (ii) dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều; và (iii) dầm có đồng thời mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan không gian và độ lệch chuẩn của các trường ngẫu nhiên đầu vào đối với COV của giá trị riêng được thể hiện trong Hình 4.20 đến Hình 4.22, trong khi Hình 4.23 đến Hình 4.27 minh họa mối quan hệ giữa COV của giá trị riêng và COV của các trường ngẫu nhiên đầu vào.



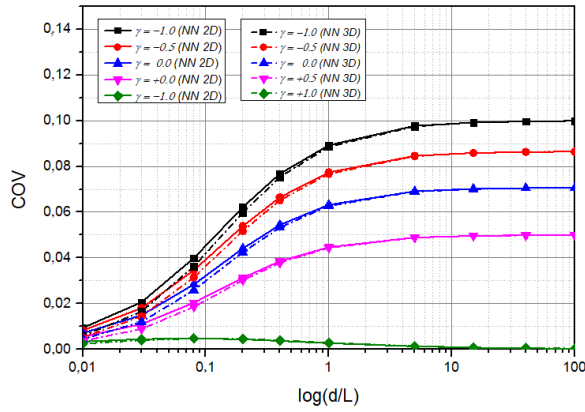
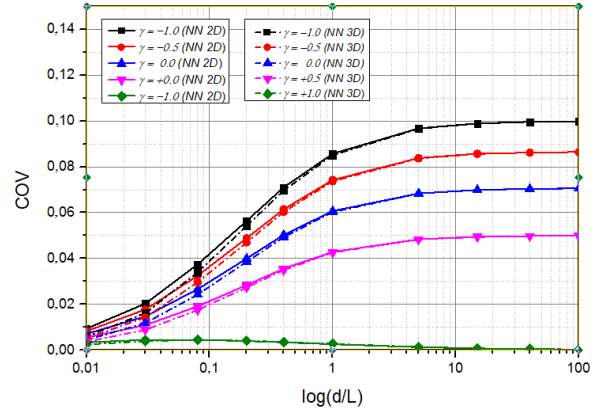
Hình 4.20. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Kết quả phân tích so sánh cho thấy rằng khi số chiều của trường ngẫu nhiên tăng từ hai lên ba, COV của giá trị riêng giảm đáng kể trong trường hợp chiều dài tương quan của các trường vật liệu nhỏ hơn kích thước đặc trưng của kết cấu dầm. Hiện tượng này phản ánh hiệu ứng trung bình hóa thống kê xảy ra mạnh mẽ hơn trong trường hợp ba chiều, khi các thể tích ngẫu nhiên độc lập hơn cùng đóng góp vào đáp ứng tổng thể, làm giảm mức độ phân tán ngẫu nhiên của giá trị riêng. Ngược lại, khi chiều dài tương quan lớn hơn kích thước đặc trưng của dầm, trường ngẫu nhiên trở nên tương đối đồng nhất trong toàn miền vật liệu, và đáp ứng của dầm dần tiến tới ứng xử tương tự một biến ngẫu nhiên toàn cục.

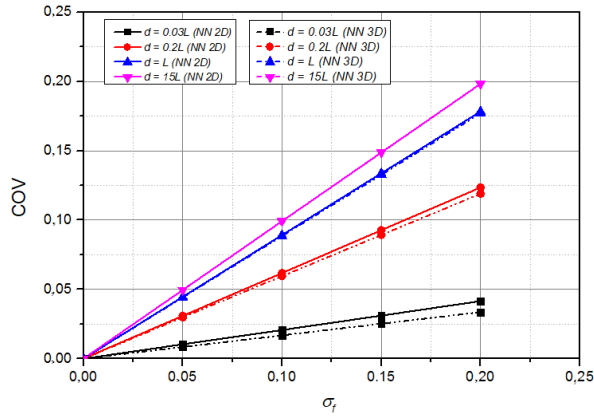
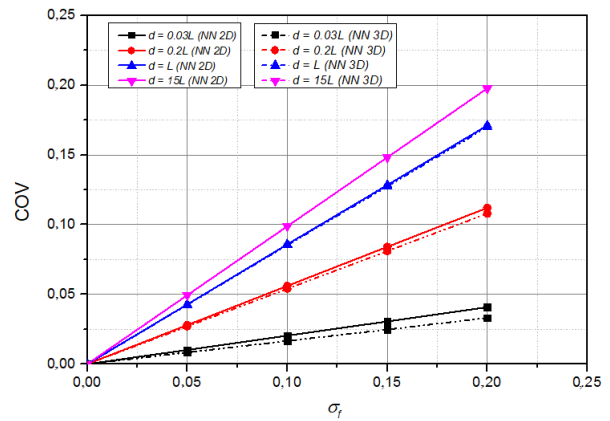
Khi đó, sự sai khác giữa kết quả hai chiều và ba chiều là không đáng kể, thể hiện qua sự tiệm cận của các giá trị COV.

a. λ_1 b. λ_2

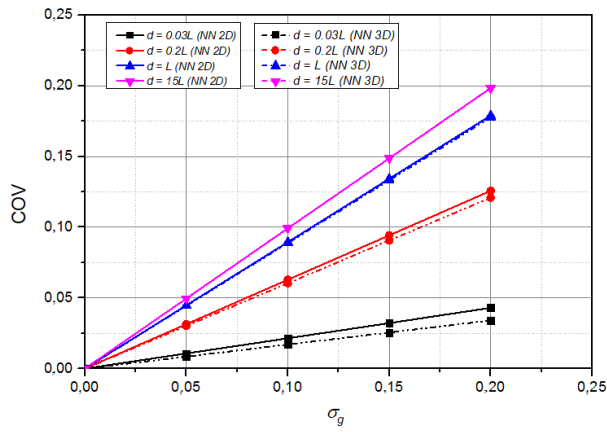
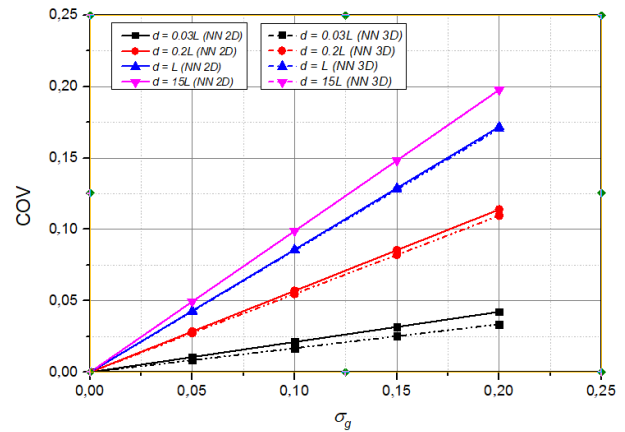
Hình 4.21. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp đầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

a. λ_1 b. λ_2

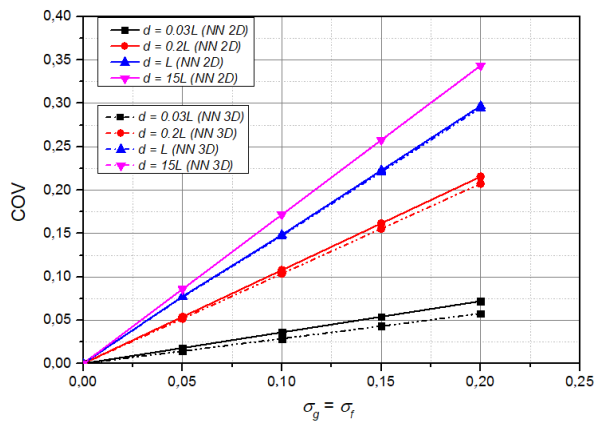
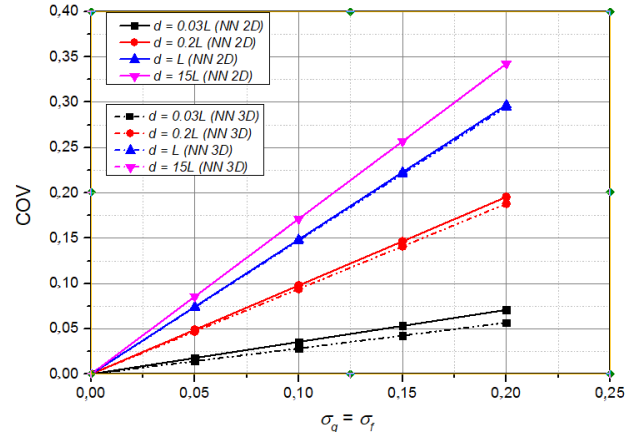
Hình 4.22. So sánh COV của giá trị riêng trường hợp đầm có tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

a. λ_1 b. λ_2

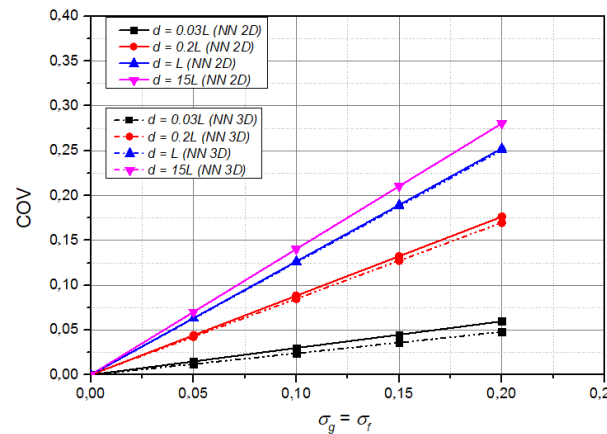
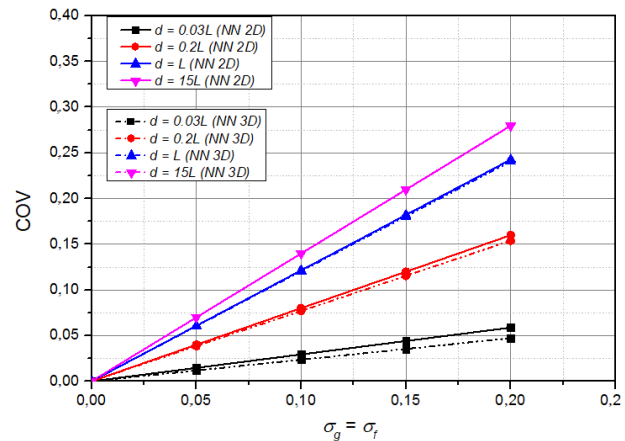
Hình 4.23. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

a. λ_1 b. λ_2

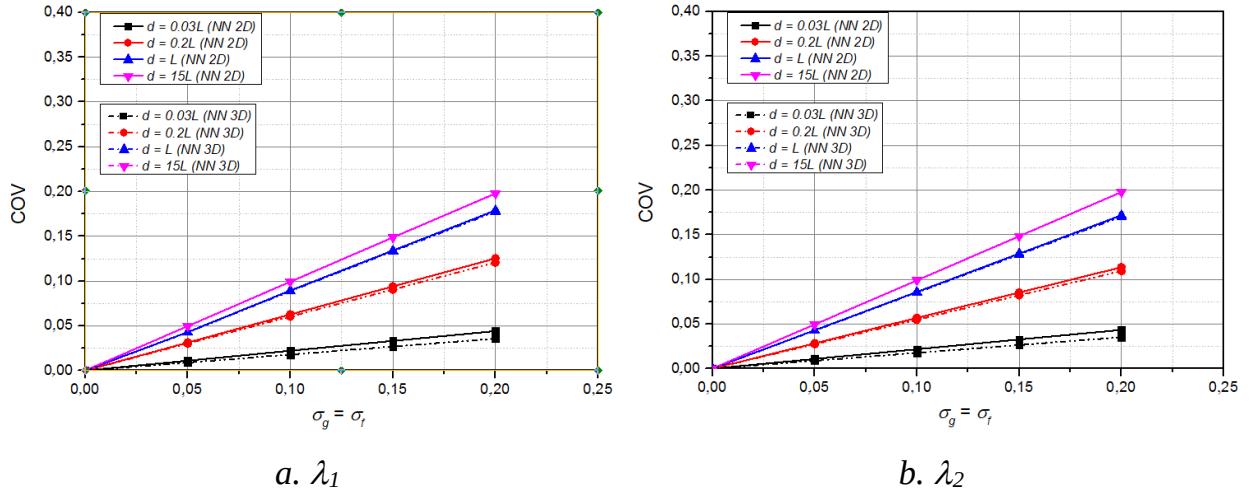
Hình 4.24. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường mật độ khối lượng ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

a. λ_1 b. λ_2

Hình 4.25. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = -0,5$)

a. λ_1 b. λ_2

Hình 4.26. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = 0$)



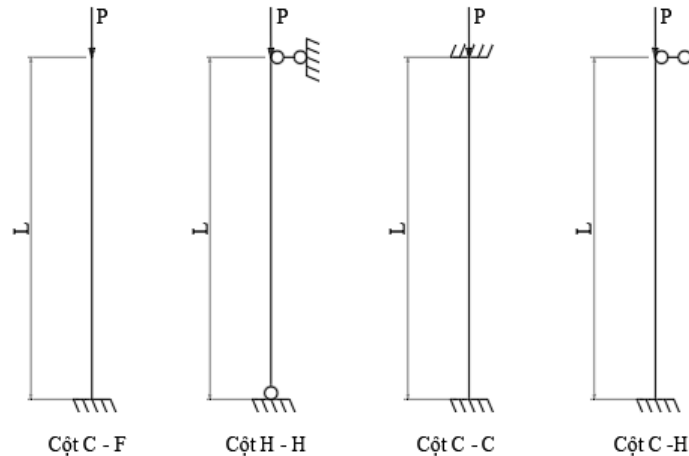
Hình 4.27. So sánh quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường tính chất vật liệu ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều ($\gamma = 0,5$)

4.3. KHẢO SÁT ĐỊNH LƯỢNG ỔN ĐỊNH EULER CỦA CỘT CÓ TÍNH CHẤT VẬT LIỆU NGẪU NHIÊN KHÔNG GIAN

Xét cột chịu nén đúng tâm có chiều dài $L = 8\text{ m}$, mặt cắt ngang $b = h = 0,25\text{ m}$, bốn điều kiện liên kết: ngàm-ngàm, ngàm-khớp, khớp-khớp và ngàm-tự do. Mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên không gian (hai chiều, ba chiều) dưới dạng trường ngẫu nhiên Gaussian, dùng với hàm tự hiệp phương sai như phương trình (4.7) và (4.8) với giá trị kỳ vọng $E_0 = 30 \times 10^9\text{ N/m}^2$. Độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên không gian $\sigma_f = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20$ chiều dài tương quan không gian thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$.

$$C_{EE}(\xi_1, \xi_2) = E_0^2 \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} \right] \quad (4.7)$$

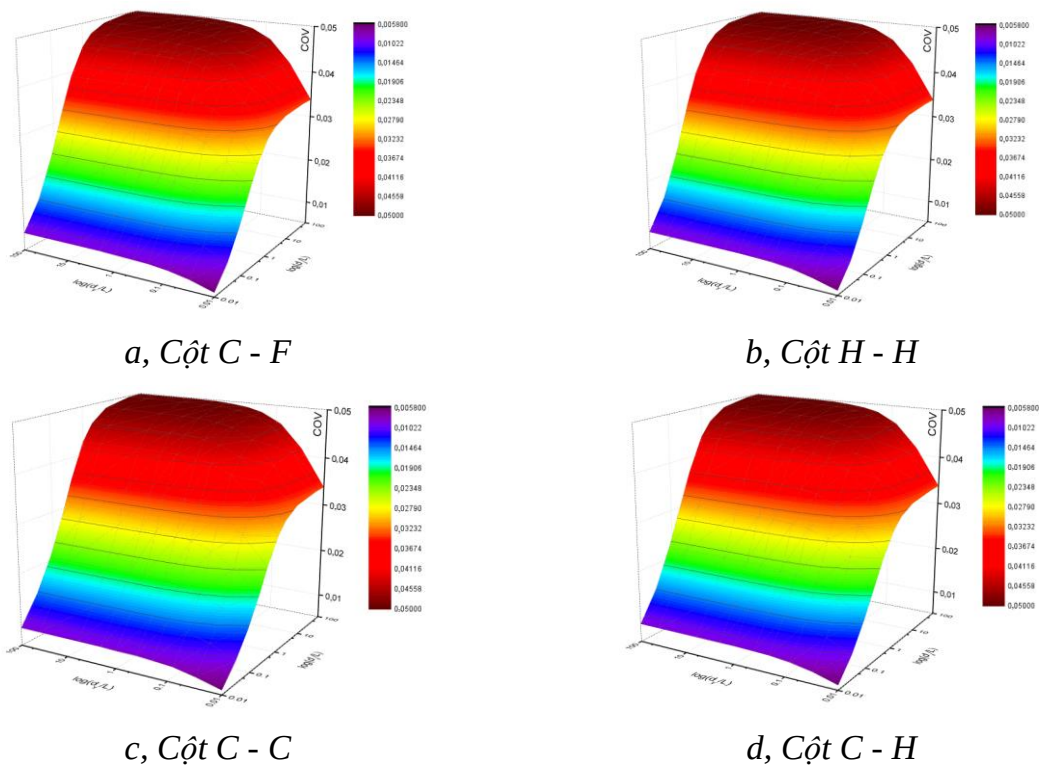
$$C_{EE}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E_0^2 \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{|\xi_1|}{d_x} - \frac{|\xi_2|}{d_y} - \frac{|\xi_3|}{d_z} \right] \quad (4.8)$$



Hình 4.28. Sơ đồ tính cột chịu nén đúng tâm

4.3.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan của trường ngẫu nhiên đến hệ số biến thiên lực tới hạn

Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn được khảo sát cho thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$ và $\sigma_f = 0,05$. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan hai chiều đến COV của lực tới hạn được thể hiện trong Hình 4.29 tương ứng với các dạng liên kết ở hai đầu cột khác nhau. Kết quả phân tích cho thấy hệ số biến thiên (COV) của lực tới hạn có mối liên hệ tỷ lệ thuận với chiều dài tương quan. Cụ thể, khi chiều dài tương quan nhỏ, mô đun đàn hồi biến động trong những khoảng không gian hẹp. Điều này kích hoạt mạnh mẽ hiệu ứng trung bình hóa không gian (spatial averaging effect) trên toàn bộ cầu kiện, làm triệt tiêu các biến động cục bộ và dẫn đến lực tới hạn ít bị phân tán, tập trung sát với giá trị kỳ vọng. Ngược lại, khi chiều dài tương quan lớn, sự biến thiên không gian của mô đun đàn hồi diễn ra rất chậm, khiến hiệu ứng trung bình hóa suy yếu. Lúc này, đáp ứng của toàn hệ thống dao động mạnh xung quanh giá trị kỳ vọng. Đặc biệt, khi chiều dài tương quan tiến tới vô cùng, trường ngẫu nhiên thoái hóa thành một biến ngẫu nhiên duy nhất; kéo theo đó, mức độ biến thiên của COV sẽ tiệm cận với mức độ biến thiên đầu vào của mô đun đàn hồi. Thêm vào đó, kết quả cũng chỉ ra rằng COV của lực tới hạn nhạy cảm với chiều dài tương quan dọc theo chiều dài của cột hơn so với chiều dài tương quan theo phương ngang (chiều cao tiết diện).

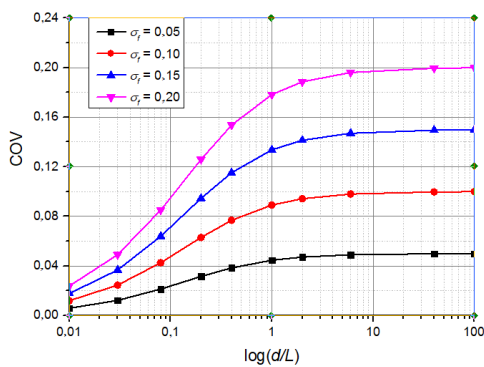


Hình 4.29. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

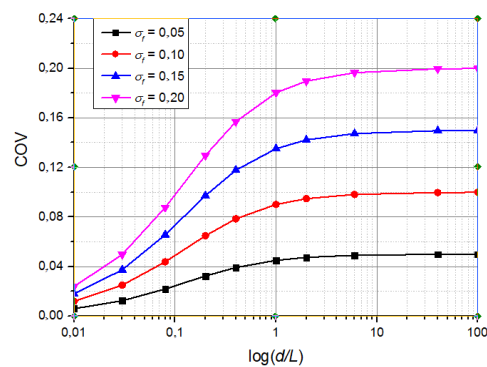
Ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo các trục trong không gian của trường ngẫu nhiên ba chiều E đến COV của lực tới hạn được thể hiện trong các Hình A.16 đến Hình A.18 trong phụ lục A. Có ba trường hợp của chiều dài tương quan được khảo sát bao gồm: $d_y = d_z = d$ và $d_x = d$ với d thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$; $d_x = d_z = d$ và $d_y = d$ với d thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$; $d_x = d_y = d$ và $d_z = d$ với d thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$. Khi chiều dài tương quan không gian nhỏ thì COV nhận giá trị nhỏ và khi chiều dài tương quan theo các trục tăng thì COV tăng. Ở những giá trị của chiều dài tương quan lớn COV tiếp tục có xu hướng tăng khi chiều dài tương quan theo các trục trong không gian tiếp tục tăng nhưng mức độ tăng của COV không đáng kể. Khi chiều dài tương quan theo các trục trong không gian có xu hướng vô cùng thì COV có xu hướng tiệm cận đến độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều. Ngoài ra, ảnh hưởng của chiều dài tương quan theo phương dọc trục là phương chịu lực chính của cột, đến COV của lực tới hạn thể hiện rõ rệt hơn so với các phương còn lại, do sự phân bố ngẫu nhiên dọc theo chiều dài có tác động trực tiếp hơn đến độ cứng tổng thể và khả năng ổn định của cột.

4.3.2. Phân tích ảnh hưởng của hệ số biến thiên mô đun đàn hồi đến hệ số biến thiên lực tới hạn

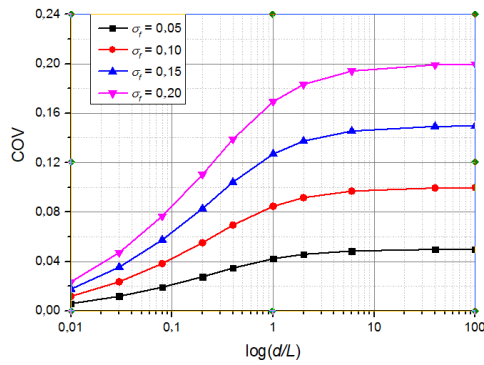
Để phân tích ảnh hưởng của độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên không gian cũng chính là hệ số biến thiên của mô đun đàn hồi đến COV của lực tới hạn ở những chiều dài tương quan khác nhau thì trong nghiên cứu này độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên được giả định tương ứng với các giá trị 0; 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Chiều dài tương quan theo hai trục bằng nhau và thay đổi từ $0,01L$ đến $100L$. COV của lực tới hạn và độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên không gian có mối tương quan dương như Hình 4.30. Điều này có nghĩa là khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên tăng, COV của lực tới hạn cũng có xu hướng tăng và ngược lại.



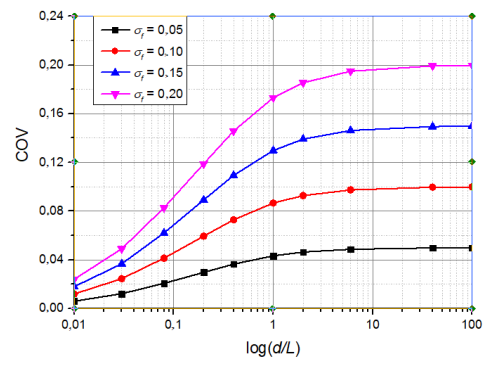
a, Cột C - F



b, Cột H - H



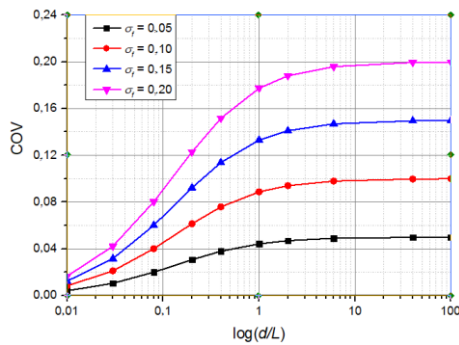
c, Cột C - C



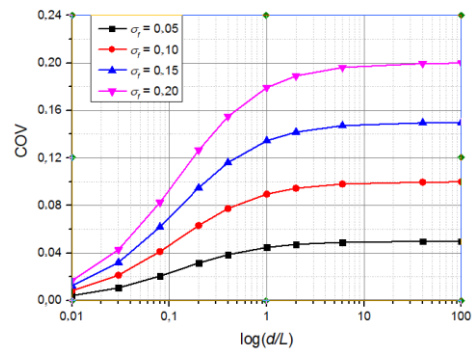
d, Cột C - H

Hình 4.30. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của lực tới hạn

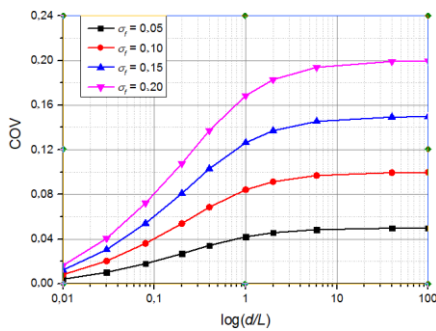
Hình 4.31 thể hiện ảnh hưởng của chiều dài tương quan và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV. COV có xu hướng tăng khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên tăng hoặc chiều dài tương quan tăng. Khi độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên tăng, nghĩa là mức độ biến động của mô đun đàn hồi quanh giá trị kỳ vọng càng lớn. Điều này làm tăng biến động của lực tới hạn xung quanh giá trị kỳ vọng và dẫn đến COV tăng lên. Ở những giá trị nhỏ của chiều dài tương quan COV có xu hướng tăng mạnh khi chiều dài tương quan tăng. Ngược lại, ở những giá trị lớn của chiều dài tương quan thì COV có xu hướng tăng nhưng với mức tăng giảm dần kể khi chiều dài tương quan tăng.



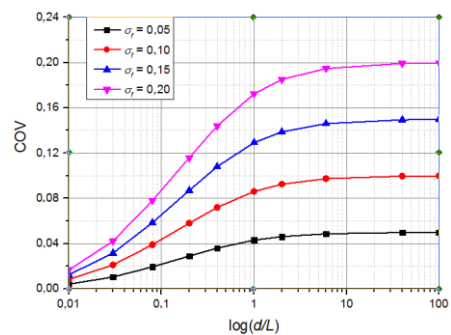
a, Cột C - F



b, Cột H - H



c, Cột C - C

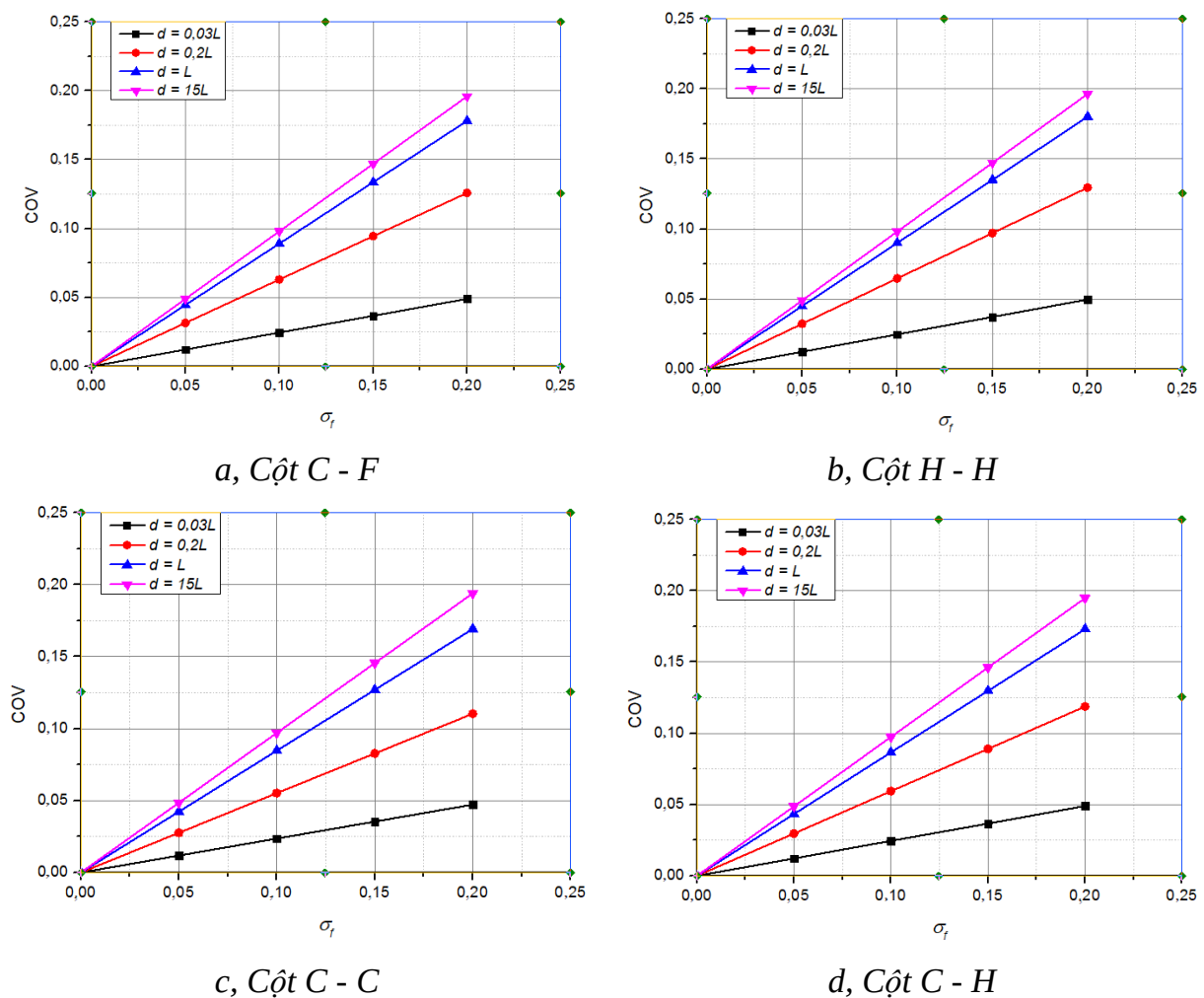


d, Cột C - H

Hình 4.31. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên ba chiều đến COV của lực tới hạn

4.3.3. Phân tích quan hệ giữa hệ số biến thiên lực tới hạn và hệ số biến thiên mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian

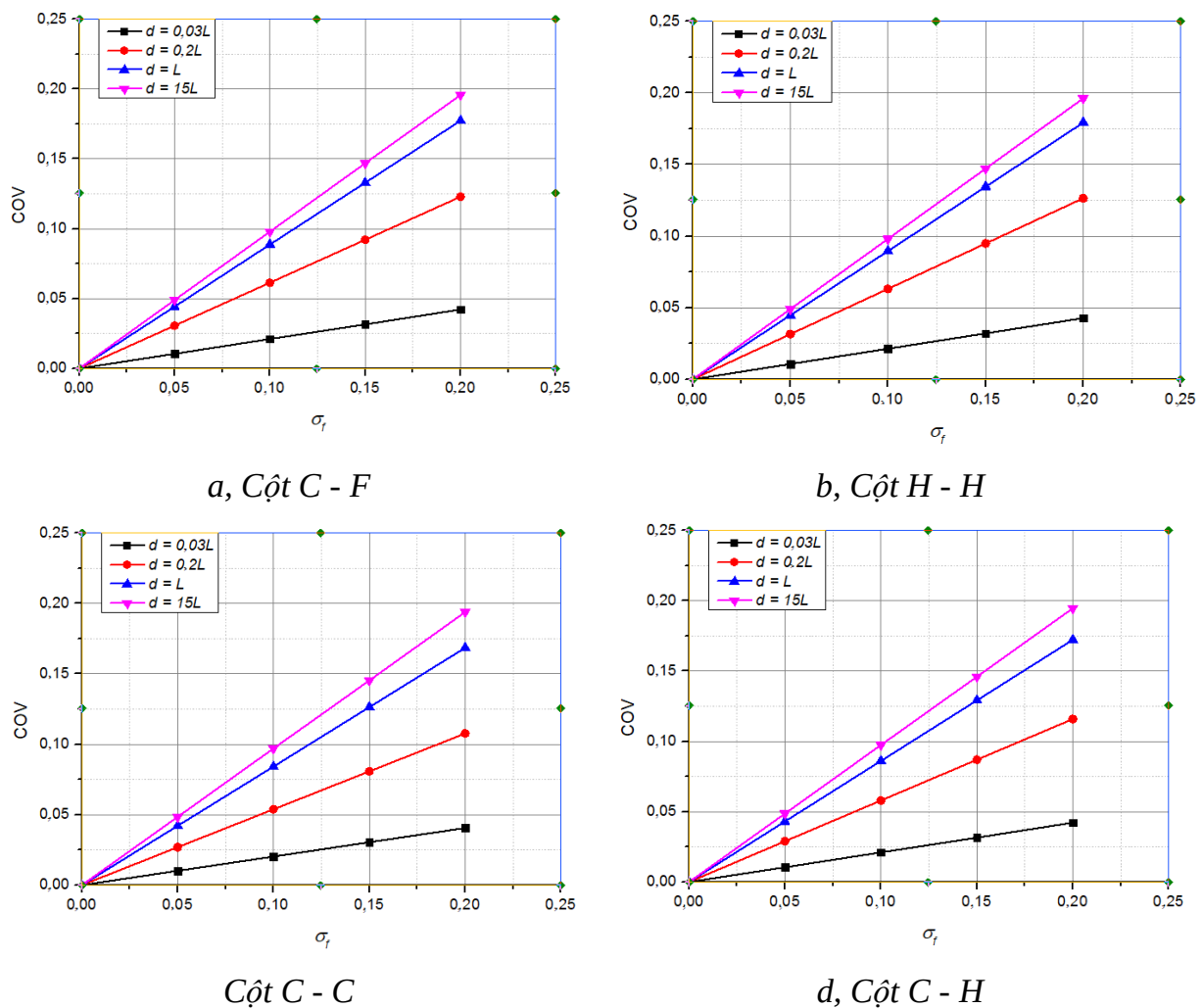
Quan hệ giữa độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của lực tới hạn cho các cột có liên kết ở hai đầu khác nhau cũng được phân tích trong nghiên cứu này. Có bốn trường hợp của chiều dài tương quan được khảo sát bao gồm $d_x = d_y = 0,03L$; $d_x = d_y = 0,2L$; $d_x = d_y = 1L$; $d_x = d_y = 15L$. Kết quả phân tích được thể hiện trong Hình 4.32. Sự biến động của mô đun đàn hồi xung quanh giá trị kỳ vọng dẫn đến sự biến động của lực tới hạn xung quanh giá trị kỳ vọng của lực tới hạn. Quan hệ giữa độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều và COV của lực tới hạn gần như là tuyến tính. Vì vậy hoàn toàn có thể dự báo được ứng xử ổn định ngẫu nhiên của lực tới hạn khi biết được COV của yếu tố ngẫu nhiên đầu vào.



Hình 4.32. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi

Mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều của cột được biểu diễn dưới dạng toán học như phương trình (3.21) với $f(x,y,z)$ là trường ngẫu nhiên ba chiều có giá trị kỳ vọng bằng

không. Do đó COV của mô đun đàn hồi bằng với độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều. Như vậy quan hệ giữa COV của lực tới hạn và độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều cũng chính là quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều. Để phân tích mối quan hệ này các trường hợp của chiều dài tương quan được phân tích bao gồm: $d_x = d_y = d_z = 0,03L$; $d_x = d_y = d_z = 0,2L$; $d_x = d_y = d_z = 1L$; $d_x = d_y = d_z = 15L$. Độ lệch chuẩn của trường ngẫu nhiên ba chiều được giả định nhận các giá trị bao gồm: 0; 0,05; 0,10; 0,15 và 0,20. Kết quả phân tích được thể hiện trong Hình 4.33. Kết quả phân tích cho thấy tồn tại quan hệ gần như tuyến tính giữa COV của lực tới hạn và COV của mô đun đàn hồi. Do vậy có thể dự đoán được đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu cột khi biết được tính chất ngẫu nhiên của yếu tố đầu vào.

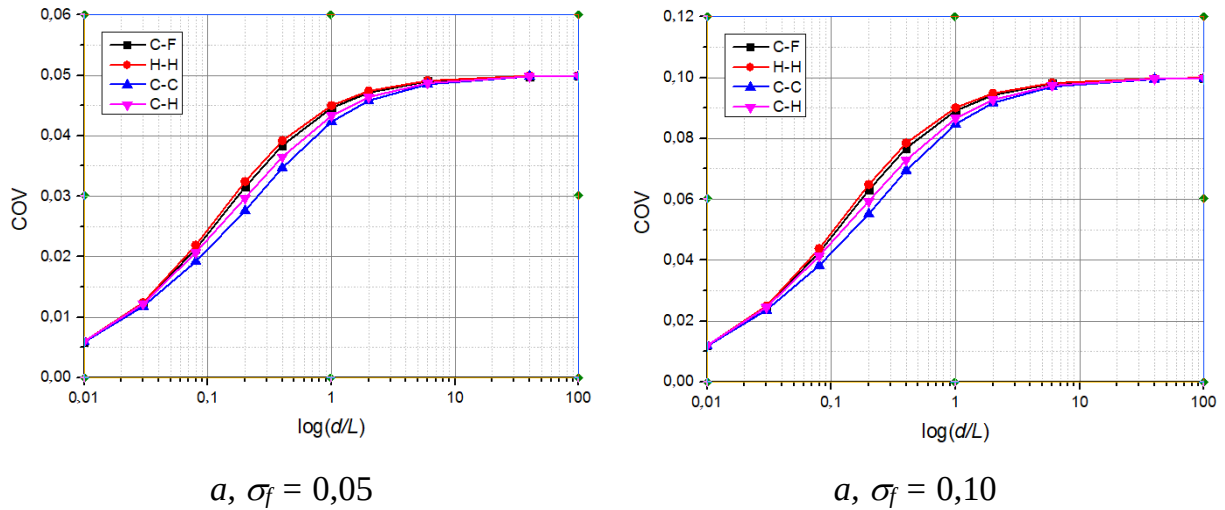


Hình 4.33. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi

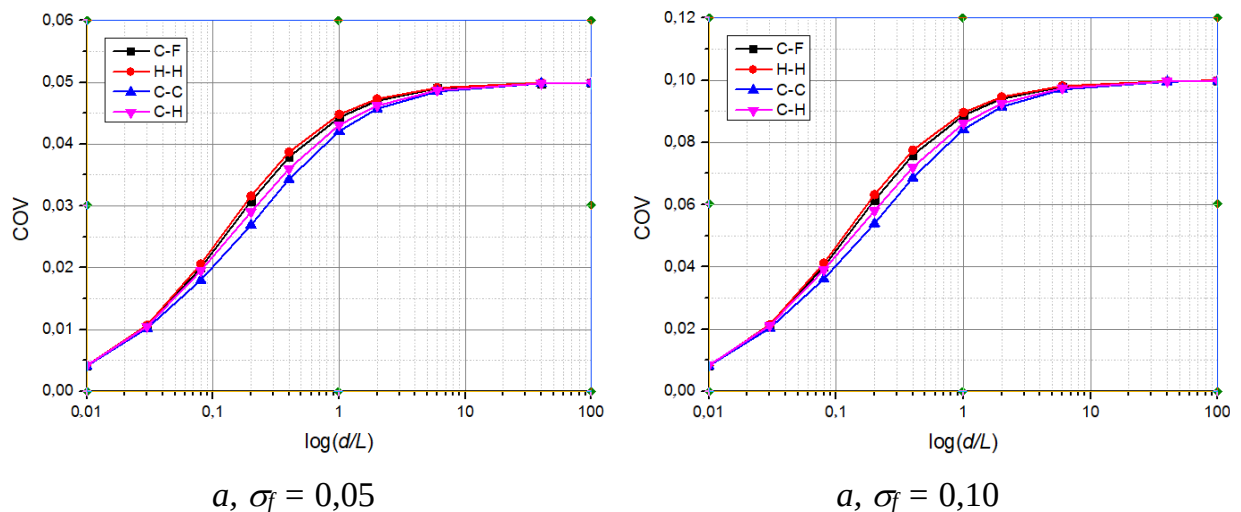
4.3.4. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến hệ số biến thiên lực tới hạn

Liên kết của hai đầu cột có ảnh hưởng trực tiếp đến độ lớn của lực tới hạn và dạng mất ổn định của cột. Khi cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên không gian thì lực tới hạn cũng

là một biến ngẫu nhiên. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu cột đến COV là tương đối nhỏ khi so sánh với ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên tính chất vật liệu, đặc biệt ở những chiều dài tương quan nhỏ hoặc chiều dài tương quan lớn có xu hướng vô cùng như Hình 4.34 và Hình 4.35. Như vậy tính ngẫu nhiên không gian ba chiều của mô đun đàn hồi ảnh hưởng rõ rệt đến ổn định ngẫu nhiên của cột chịu nén đúng tâm.



Hình 4.34. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều

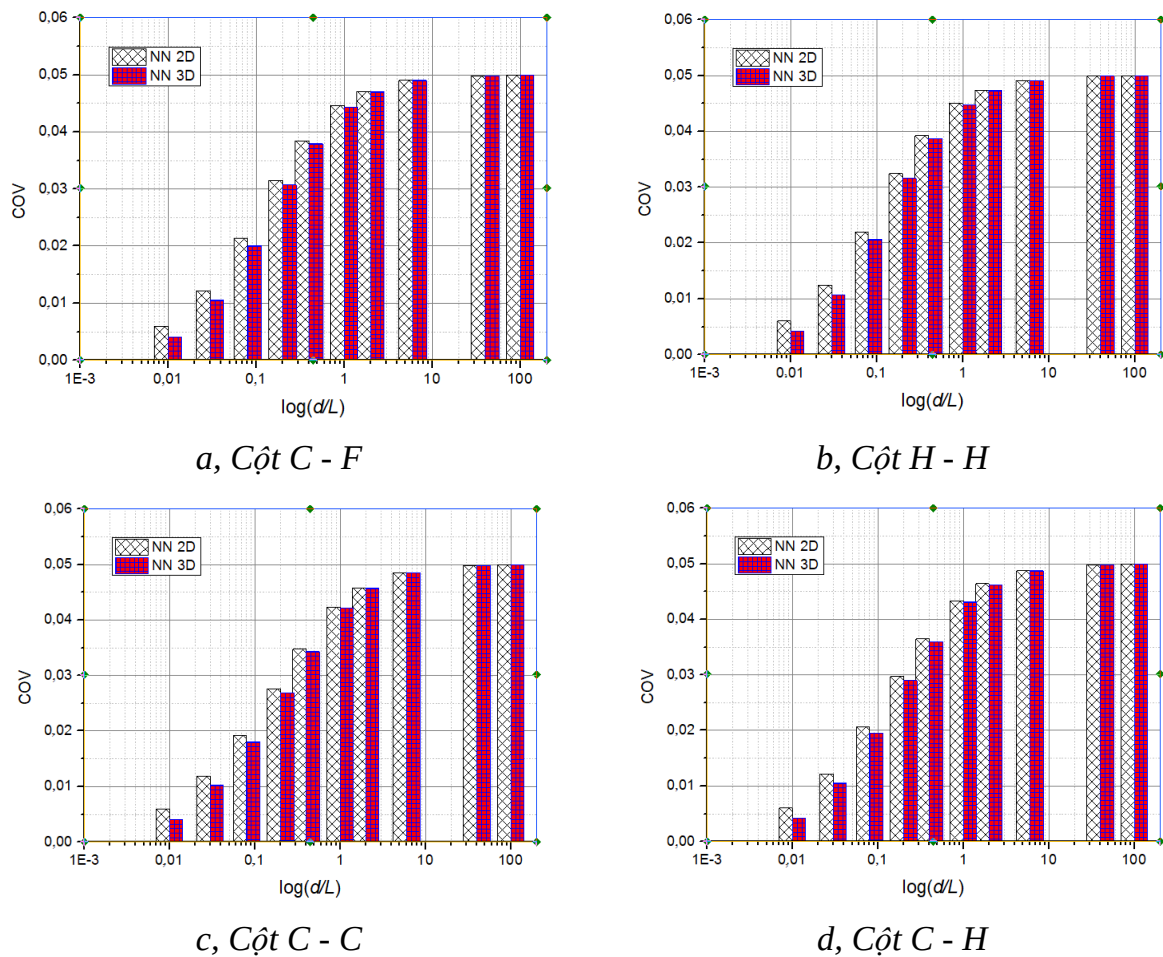


Hình 4.35. Ảnh hưởng của liên kết hai đầu thanh đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều

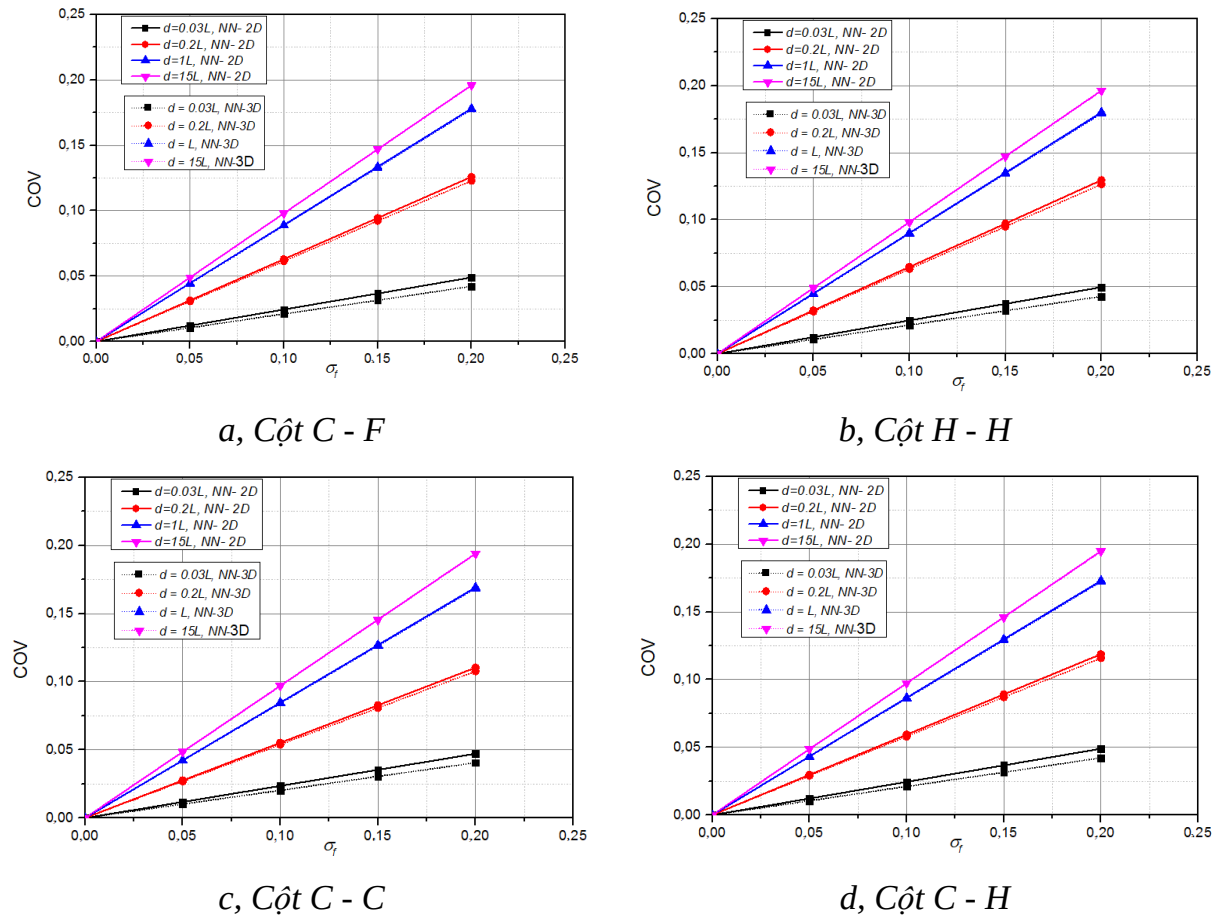
4.3.5. So sánh ổn định Euler của cột có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

Khi mô đun đàn hồi của vật liệu được mô hình hóa như một trường ngẫu nhiên hai chiều, sự thay đổi ngẫu nhiên không chắc chắn trong không gian của mô đun đàn hồi chỉ được xét trong phạm vi mặt phẳng là theo trục dọc và chiều cao của tiết diện. Ngược lại, trong trường hợp trường ngẫu nhiên ba chiều, mô đun đàn hồi được phân bố ngẫu nhiên

trong toàn bộ thể tích của cột, phản ánh đầy đủ hơn tính không đồng nhất vật liệu trong không gian. Kết quả này dẫn đến sự khác biệt về đặc trưng ngẫu nhiên của đáp ứng được thể hiện trong các hình Hình 4.36 đến Hình 4.37. Cụ thể, khi chiều dài tương quan không gian nhỏ hơn kích thước đặc trưng của cột, COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ba chiều có giá trị nhỏ hơn so với trường hợp hai chiều. Điều này cho thấy đáp ứng ngẫu nhiên của cột ba chiều có mức độ phân tán nhỏ hơn quanh giá trị kỳ vọng, phản ánh tính ổn định thống kê cao hơn. Ngược lại, khi chiều dài tương quan không gian tăng và trở nên lớn so với kích thước cột khi đó COV của lực tới hạn trong hai trường hợp gần như giống nhau.



Hình 4.36. So sánh COV của lực tới hạn, E ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều



Hình 4.37. Quan hệ giữa COV của lực tới hạn và độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều và ba chiều

4.4. KẾT LUẬN CHƯƠNG IV

Dựa trên mô hình SFEM đã được xây dựng và kiểm chứng ở các chương trước, ảnh hưởng của trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu đầu vào đến ứng xử của dầm và cột đã được khảo sát định lượng toàn diện trong Chương IV. Từ các kết quả phân tích, những quy luật cơ học ngẫu nhiên cốt lõi đã được đúc kết, bao gồm:

Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột:

- ✓ **Hiệu ứng trung bình hóa thống kê:** Khi chiều dài tương quan nhỏ, sự biến thiên ngẫu nhiên nhanh của tính chất vật liệu gây ra hiệu ứng trung bình hóa mạnh làm giảm độ phân tán (COV) của đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột.
- ✓ **Sự bão hòa độ phân tán:** Khi chiều dài tương quan tăng, COV của đáp ứng ngẫu nhiên tăng nhanh và dần bão hòa. Khi chiều dài tương quan tiến tới vô cùng, trường ngẫu nhiên chuyển trạng thái thành biến ngẫu nhiên toàn cục; lúc này COV của đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột tiệm cận với COV của tính chất vật liệu đầu vào.

- ✓ **Tính chi phối có hướng:** Chiều dài tương quan theo phương dọc trục giữ vai trò chi phối đối với độ phân tán của đáp ứng so với các phương còn lại.

Ảnh hưởng của chiều không gian ngẫu nhiên (2D, 3D):

- ✓ Sự khác biệt về hiệu ứng trung bình hóa giữa mô hình ngẫu nhiên 2D và 3D đã được chỉ ra rõ rệt thông qua kết quả so sánh. Trong phạm vi chiều dài tương quan nhỏ, mô hình ngẫu nhiên 3D thể hiện hiệu ứng trung bình hóa mạnh mẽ hơn, dẫn đến COV đáp ứng ngẫu nhiên có giá trị nhỏ hơn khi đối sánh với mô hình ngẫu nhiên 2D.
- ✓ Tuy nhiên, khi chiều dài tương quan rất lớn, sự khác biệt giữa ứng xử ngẫu nhiên giữa hai mô hình ngẫu nhiên này bị triệt tiêu do cả hai đều tiệm cận về bài toán biến ngẫu nhiên đồng nhất.

Ảnh hưởng của tương quan chéo (Cross-Correlation): Đối với bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính, mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên E và ρ chi phối mạnh mẽ độ phân tán của giá trị riêng đã được làm rõ:

- ✓ **Tương quan âm hoàn hảo:** Gây ra hiện tượng cộng gộp sự phân tán khiến COV của giá trị riêng đạt cực đại (tiệm cận tổng COV của E và ρ khi chiều dài tương quan có xu hướng lớn vô cùng).
- ✓ **Tương quan dương hoàn hảo:** Gây ra hiện tượng triệt tiêu ngẫu nhiên, làm giảm đáng kể sự phân tán của đáp ứng ngẫu nhiên giá trị riêng.

Mối quan hệ giữa COV đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột và COV của tính chất vật liệu:

- ✓ Tồn tại mối tương quan dương và gần như tuyến tính giữa mức độ biến động (COV) của vật liệu đầu vào và COV của đáp ứng đầu ra. Đây là cơ sở lý thuyết quan trọng giúp cho các bài toán dự báo độ tin cậy sơ bộ.

Độ nhạy của tính ngẫu nhiên không gian tính chất vật liệu và loại liên kết:

- ✓ So sánh độ nhạy cho thấy tính ngẫu nhiên không gian của vật liệu đóng vai trò quyết định so với điều kiện biên trong việc gây ra sự phân tán tải trọng tới hạn. Điều này nhấn mạnh tầm quan trọng của việc kiểm soát chất lượng vật liệu trong bài toán ổn định.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

I. Những đóng góp mới của Luận án

Luận án đã nghiên cứu và phát triển thành công phương pháp phần tử hữu hạn ngẫu nhiên (SFEM) nhằm phân tích đáp ứng cơ học của kết cấu dầm, cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên trong không gian. Những đóng góp khoa học chính của luận án được tổng kết như sau:

1. Phát triển và xác thực khung phân tích phần tử hữu hạn ngẫu nhiên cho kết cấu dầm, cột có tính chất vật liệu ngẫu nhiên không gian đa chiều:

- ✓ Tích hợp trường ngẫu nhiên đa chiều: Tích hợp trường ngẫu nhiên không gian (2D, 3D) Gaussian, dùng vào mô hình cơ học ngẫu nhiên của cấu kiện dầm và cột, mở rộng phạm vi phân tích so với các mô hình ngẫu nhiên một chiều (1D) truyền thống;
- ✓ Thiết lập công cụ giải tích: Phát triển kỹ thuật tích phân trọng số kết hợp khai triển nhiễu loạn Taylor bậc nhất để thiết lập ma trận độ cứng và ma trận khối lượng ngẫu nhiên. Phương pháp này cho phép giải quyết các bài toán tĩnh ngẫu nhiên, động lực học tuyến tính ngẫu nhiên và ổn định Euler ngẫu nhiên, đồng thời xác định trực tiếp các đặc trưng thống kê bậc thấp (kỳ vọng, phương sai, hệ số biến thiên) đáp ứng ngẫu nhiên của dầm, cột mà không phụ thuộc vào phương pháp tính toán lặp;
- ✓ Kiểm chứng độ tin cậy: Độ tin cậy của mô hình SFEM đã phát triển trong luận án được xác thực thông qua việc đánh giá tính hội tụ theo lưới phần tử, kiểm chứng sự tiệm cận nghiệm về bài toán tất định, và đối sánh với kết quả từ phương pháp mô phỏng Monte Carlo (MCS) và các nghiên cứu trước đây.

2. Làm sáng tỏ cơ chế vật lý ngẫu nhiên chi phối ứng xử kết cấu thông qua chiều dài tương quan và số chiều không gian (2D, 3D):

- ✓ Luận án đã định lượng ảnh hưởng của chiều dài tương quan không gian đối với sự phân tán đáp ứng cơ học ngẫu nhiên. Ở giới hạn chiều dài tương quan nhỏ, các thăng giáng cục bộ bị triệt tiêu bởi hiệu ứng trung bình hóa thống kê, giúp duy trì hệ số biến thiên (COV) ở mức thấp. Ngược lại, khi chiều dài tương quan tăng lớn, độ phân tán bị khuếch đại và bão hòa khi trường không gian suy biến thành một biến ngẫu nhiên toàn cục;
- ✓ Phát hiện tính chi phối có hướng: Sự biến thiên ngẫu nhiên theo phương dọc trực thể hiện mức độ chi phối lớn nhất đến sự phân tán đáp ứng tổng thể của kết cấu so với sự biến thiên trên các phương của mặt cắt ngang.

3. Đánh giá ảnh hưởng của tương quan chéo giữa trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng đến đặc trưng động lực học tuyến tính ngẫu nhiên của kết cấu dầm:

- ✓ Phân tích cơ chế tương tác thống kê: Phân tích cơ chế tương tác thống kê giữa ma trận độ cứng và ma trận khối lượng dưới tác động của hệ số tương quan chéo của trường ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi và trường ngẫu nhiên của mật độ khối lượng;
- ✓ Chỉ ra sự khuếch đại phân tán: Khẳng định hệ số biến thiên (COV) của giá trị riêng (tần số dao động tự do) bị khuếch đại và đạt cực đại khi hai trường tính chất vật liệu có tương quan âm hoàn hảo;
- ✓ **Xác định cơ chế suy giảm độ bất định:** Chứng minh sự phân tán của giá trị riêng giảm đáng kể khi hai trường ngẫu nhiên tính chất vật liệu có tương quan dương hoàn hảo, cung cấp cơ sở định lượng quan trọng trong phân tích động lực học tuyến tính của kết cấu dầm.

4. Thiết lập quy luật dự báo và khẳng định vai trò trọng yếu của tính biến thiên không gian trong phân tích ngẫu nhiên dầm, cột:

- ✓ Xác lập quy luật dự báo: Phân tích định lượng chỉ ra mối tương quan đồng biến, xấp xỉ tuyến tính giữa hệ số biến thiên (COV) của các tham số vật liệu đầu vào và COV của đáp ứng đầu ra, tạo cơ sở cho việc dự báo nhanh mức độ bất định của hệ thống;
- ✓ Khẳng định vai trò chi phối: Thông qua phân tích độ nhạy trong bài toán ổn định Euler, nghiên cứu chứng minh tính biến thiên không gian của vật liệu đóng vai trò quyết định đối với sự phân tán của tải trọng tới hạn, thể hiện mức độ ảnh hưởng vượt trội so với ảnh hưởng của điều kiện biên.

II. Những hạn chế của Luận án

- ✓ Mô hình SFEM được xây dựng trong luận án dựa trên lý thuyết dầm Euler–Bernoulli, do đó chưa xem xét đến ảnh hưởng của biến dạng cắt;
- ✓ Luận án chủ yếu tập trung phân tích ứng xử tổng thể của dầm, cột dưới ảnh hưởng ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu chưa xem xét ảnh hưởng cục bộ của trường ngẫu nhiên không gian, bỏ qua sự thay đổi vị trí trục trung hòa trong quá trình phân tích;
- ✓ Tính ngẫu nhiên không gian của tính chất vật liệu được khảo sát trong phạm vi có mức độ biến thiên vừa và nhỏ; các trường hợp vật liệu có độ biến thiên mạnh chưa được xem xét.

III. Kiến nghị hướng nghiên cứu tiếp theo

Kiến nghị các hướng nghiên cứu được đề xuất nhằm phát triển vấn đề nghiên cứu:

- ✓ Xét đến phi tuyến hình học và vật liệu, đặc biệt trong các cấu kiện có độ mảnh lớn hoặc chịu tải lớn, xem xét sự thay đổi vị trí trục trung hòa trong quá trình phân tích;
- ✓ Phát triển SFEM trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) để phân tích dầm có chiều cao đáng kể;
- ✓ Mở rộng mô hình để xem xét các yếu tố ngẫu nhiên khác như tải trọng, kích thước hình học, điều kiện biên, hoặc sự suy giảm tính chất vật liệu theo thời gian;
- ✓ Kết hợp mô hình học sâu (Deep learning) và SFEM để dự đoán đáp ứng ngẫu nhiên của kết cấu.

DANH MỤC CÁC CÔNG BỐ KHOA HỌC

1. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Stochastic finite element for stability of columns considering the two-dimensional random field of elastic modulus", *Results in Engineering* 25, pp. 104496. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q1).
2. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Free vibration of beams using stochastic finite element method considering three-dimensional randomness of material properties", *Forces in Mechanics* 19, pp. 100312. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q2).
3. **Nguyen Dang Diem**, Pham Van Dat, Ta Duy Hien (2025), "Analysis of Beams with a Three-dimensional Random Field of the Modulus of Elasticity Using the Stochastic Finite Element Method", *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences* 10(5), pp. 1518-1538. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q2).
4. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien (2025), "Monte Carlo Simulation of a Beam Resting on an Elastic Foundation Considering the Two-Dimensional Stochastic Properties of the Elastic Modulus", *International Journal of Integrated Engineering* 17(5), pp. 65-76. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q3).
5. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien, Dao Sy Dan, Nguyen Duy Hung (2025), "Column Buckling under Stochastic Three-dimensional Material Properties: A Stochastic Finite Element Analysis", *Coupled Systems Mechanics* 14(4), pp. 347-369. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI, Q4).
6. **Nguyen Dang Diem**, Dao Sy Dan, Ta Duy Hien, Dao Ngoc Tien (2025), "Stochastic Stability Analysis of Columns with Randomly Elastic Joint Ends and Two-Dimensional Random Material Properties Using Monte Carlo Simulation", *Journal of Materials Engineering Structures* 12(1), pp. 73-83. (Tập chí thuộc danh mục WoS/ESCI).
7. **Nguyen Dang Diem**, Ta Duy Hien, Nguyen Trong Hiep, Dao Ngoc Tien (2025), "Analysis of free vibrations of a continuous beam considering the random stiffness of the supports and the two-dimensional random material properties using monte carlo simulation", *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences* 20(4), pp. 1-19. (Tập chí thuộc danh mục Scopus, Q4).

ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

1. Chủ nhiệm đề tài nghiên cứu Khoa học cấp Trường, Phân tích ổn định của cột có mô đun đàn hồi thay đổi ngẫu nhiên ba chiều, T2025-PHII_CT-006, Trường Đại học Giao thông vận tải, 2025

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- "1. Chu Thanh Bình (2014), *Một phương pháp gần đúng tính độ tin cậy của công trình dao động chịu tải trọng ngẫu nhiên có kể đến sai lệch ngẫu nhiên của các tham số vật liệu và hình học*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Đại học xây dựng Hà Nội, Hà Nội.
2. Lê Công Duy (2014), *Một phương pháp đánh giá mức độ an toàn của kết cấu khung chịu tải trọng động theo lý thuyết tập mờ*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Đại học xây dựng Hà Nội, Hà Nội.
3. Dương Thế Hùng (2010), *Phân tích hệ thanh phẳng có liên kết nửa cứng, vết nứt và có độ cứng, khối lượng phân bố ngẫu nhiên.*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Đại học xây dựng Hà Nội, Hà Nội.
4. Dương Thế Hùng (2019), "Phân tích ứng xử kết cấu khung nhà một tầng có vết nứt dưới tác dụng của tải trọng ngẫu nhiên", *TNU Journal of Science Technology* 195(2019), tr. 125-131.
5. Vũ Trọng Huy (2021), *Nghiên cứu sự làm việc của kết cấu nhà xây dựng trong vùng chịu ảnh hưởng động đất ở Việt Nam bằng phương pháp Monte - Carlo cải tiến*, Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Viện Khoa học Công nghệ xây dựng, Hà Nội.
6. Nguyễn Ngọc Lâm (2018), "Tính ổn định ngẫu nhiên của thanh mặt cắt thay đổi có liên kết đàn hồi bằng phương pháp mô phỏng Monte Carlo", *Tạp chí Giao thông Vận tải* 4(2018), tr. 20-25.
7. Nguyễn Thị Kim Loan, Nguyễn Xuân Toàn, Nguyễn Duy Thảo, Đặng Công Thuật (2025), "Phân tích dao động của cầu dầm chịu tải trọng di động với các tham số đầu vào ngẫu nhiên bằng phương pháp tiến hóa mật độ xác suất", *Khoa học và công nghệ* 23(7), tr. 27-32.
8. Bùi Đức Năng (2010), *Tính xác suất không hỏng của kết cấu hệ thanh có kể đến các yếu tố ngẫu nhiên về vật liệu, hình học của kết cấu và tải trọng*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
9. Đoàn Như Sơn, Phạm Thị Ly, Nguyễn Phan Anh (2022), "Phân tích độ nhạy của các biến ngẫu nhiên đến độ võng kết cấu dầm", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải* 72(2022), tr. 80-84.
10. Nguyễn Chí Thọ (2021), *Phân tích dao động kết cấu hệ dầm, khung không gian có lắp thiết bị tiêu tán năng lượng chịu tải trọng ngẫu nhiên*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
11. Nguyễn Chí Thọ, Nguyễn Trí Tá, Vũ Văn Hoàng (2019), "Phân tích dao động của dầm có lắp thiết bị tiêu tán năng lượng chịu tải trọng ngẫu nhiên", *Journal of Science Technique-Section on Special Construction Engineering* 2(2019), tr. 30-35.

12. Vũ Văn Toàn (2017), *Phân tích dao động của kết cấu nhịp cầu dưới tác động của hoạt tải khai thác có xét đến độ mấp mô mặt cầu*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Đại học Giao thông vận tải, Hà Nội.
13. Lê Anh Tuấn (2003), *Phản ứng động ngẫu nhiên phi tuyến của công trình biển*, Luận án Tiến sĩ Kỹ thuật, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội.
14. Adhikari S. (2011), "Doubly Spectral Stochastic Finite-Element Method for Linear Structural Dynamics", *Journal of Aerospace Engineering* 24(3), pp. 264-276.
15. Adhikari S., Manohar C.S. (2000), "Transient Dynamics of Stochastically Parametered Beams", *Journal of Engineering Mechanics* 126(11), pp. 1131-1140.
16. Adhikari S., Mukherjee S. (2022), "The exact element stiffness matrices of stochastically parametered beams", *Probabilistic Engineering Mechanics* 69(7), pp. 103317.
17. Amir M., Kim S.-W., Choi D. (2024), "Comparative static analysis of functionally graded porous curved beams: Deterministic versus stochastic approaches", 59(8), pp. 559-574.
18. Anantha Ramu S., Ganesan R. (1992), "Stability of stochastic Leipholz column with stochastic loading", *Archive of Applied Mechanics* 62(6), pp. 363-375.
19. Ariaratnam T., Schuëller G.I. (2020), *Stochastic structural dynamics: progress in theory and applications*, CRC Press.
20. Arregui-Mena J.D., Margetts L., Mummery P.M. (2016), "Practical Application of the Stochastic Finite Element Method", *Archives of Computational Methods in Engineering* 23(1), pp. 171-190.
21. Arsene C.T.C., Gabrys B. (2013), "Probabilistic finite element predictions of the human lower limb model in total knee replacement", *Medical Engineering & Physics* 35(8), pp. 1116-1132.
22. Asprone D., Auricchio F., Menna C., Morganti S., Prota A., Reali A. (2013), "Statistical finite element analysis of the buckling behavior of honeycomb structures", *Composite Structures* 105(11), pp. 240-255.
23. Bažant Z.P., Cedolin L. (2003), *Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture, and damage theories*, Courier Corporation.
24. Bucher C.G., Shinozuka M. (1988), "Structural Response Variability II", *Journal of Engineering Mechanics* 114(12), pp. 2035-2054.
25. Chakraborty S., Bhattacharyya B. (2002), "An efficient 3D stochastic finite element method", *International Journal of Solids and Structures* 39(9), pp. 2465-2475.

26. Chang T.P., Chang H.C. (1994), "Stochastic dynamic finite element analysis of a nonuniform beam", *International Journal of Solids and Structures* 31(5), pp. 587-597.
27. Chen N.-Z., Guedes Soares C. (2008), "Spectral stochastic finite element analysis for laminated composite plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197(51), pp. 4830-4839.
28. Chryssanthopoulos M.K., Poggi C. (1995), "Stochastic imperfection modelling in shell buckling studies", *Thin-Walled Structures* 23(1), pp. 179-200.
29. Combescure A. (1997), "Influence of initial imperfections on the collapse of thin walled structures", *Studies in Applied Mechanics* 45, pp. 385-394.
30. Cortés J.-C., López-Navarro E., Martínez-Rodríguez P., Romero J.-V., Roselló M.-D. (2023), "Extending the analysis of the Euler–Bernoulli model for a stochastic static cantilever beam: Theory and simulations", *Probabilistic Engineering Mechanics* 74, pp. 103493.
31. Dang Xuan Hung (2023), "Nonlinear bending analysis of fgm beams under various boundary conditions by ritz method", *International Journal of GEOMATE* 25(109), pp. 1-8.
32. Deodatis G. (1991), "Weighted Integral Method. I: Stochastic Stiffness Matrix", *Journal of Engineering Mechanics* 117(8), pp. 1851-1864.
33. Deodatis G., Micaletti Raymond C. (2001), "Simulation of Highly Skewed Non-Gaussian Stochastic Processes", *Journal of Engineering Mechanics* 127(12), pp. 1284-1295.
34. Deodatis G., Shinozuka M. (1988), "Auto- Regressive Model for Nonstationary Stochastic Processes", *Journal of Engineering Mechanics* 114(11), pp. 1995-2012.
35. Deodatis G., Shinozuka M. (1991), "Weighted Integral Method. II: Response Variability and Reliability", *Journal of Engineering Mechanics* 117(8), pp. 1865-1877.
36. Deodatis G., Wall W., Shinozuka M. (1991), "Analysis of Two-Dimensional Stochastic Systems by the Weighted Integral Method", *Computational Stochastic Mechanics*, pp. 395-406.
37. Do Thi Hang, Nguyen Xuan Tung, Dao Ngoc Tien (2022), "Stochastic buckling analysis of non-uniform columns using stochastic finite elements with discretization random field by the point method", *Engineering, Technology Applied Science Research* 12(2), pp. 8458-8462.

38. Donaldson F.E., Coburn J.C., Siegel K.L. (2014), "Total hip arthroplasty head–neck contact mechanics: A stochastic investigation of key parameters", *Journal of Biomechanics* 47(7), pp. 1634-1641.
39. Dong X.N., Luo Q., Sparkman D.M., Millwater H.R., Wang X. (2010), "Random field assessment of nanoscopic inhomogeneity of bone", *Bone* 47(6), pp. 1080-1084.
40. Elishakoff I., Impollonia N., Ren Y.J. (1999), "New exact solutions for randomly loaded beams with stochastic flexibility", *International Journal of Solids and Structures* 36(16), pp. 2325-2340.
41. Elishakoff I., Ren Y. (2003), *Finite element methods for structures with large stochastic variations*, Oxford University Press, USA.
42. Field R.V., Grigoriu M. (2004), "On the accuracy of the polynomial chaos approximation", *Probabilistic Engineering Mechanics* 19(1), pp. 65-80.
43. Flores E.I.S., DiazDelaO F.A., Friswell M.I., Sienz J. (2012), "A computational multi-scale approach for the stochastic mechanical response of foam-filled honeycomb cores", *Composite Structures* 94(5), pp. 1861-1870.
44. Friedman Z., Kosmatka J.B. (1992), "Exact stiffness matrix of a nonuniform beam—I. Extension, torsion, and bending of a bernoulli-euler beam", *Computers & Structures* 42(5), pp. 671-682.
45. Ganesan R., Kowda V.K. (2005), "Buckling of Composite Beam-columns with Stochastic Properties", *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 24(5), pp. 513-543.
46. Geißendörfer M., Liebscher A., Proppe C., Redenbach C., Schwarzer D. (2014), "Stochastic multiscale modeling of metal foams", *Probabilistic Engineering Mechanics* 37, pp. 132-137.
47. Ghanem R. (1999), "Stochastic Finite Elements with Multiple Random Non-Gaussian Properties", *Journal of Engineering Mechanics* 125(1), pp. 26-40.
48. Ghanem R., Brzakala W. (1996), "Stochastic Finite-Element Analysis of Soil Layers with Random Interface", *Journal of Engineering Mechanics* 122(4), pp. 361-369.
49. Ghanem R., Spanos P.D. (1990), "Polynomial Chaos in Stochastic Finite Elements", *Journal of Applied Mechanics* 57(1), pp. 197-202.
50. Ghanem R.G., Kruger R.M. (1996), "Numerical solution of spectral stochastic finite element systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129(3), pp. 289-303.
51. Ghanem R.G., Spanos P.D. (1991), *Stochastic Finite Element Method: Response Statistics*, Springer New York.

52. Ghanem R.G., Spanos P.D. (2003), *Stochastic finite elements: a spectral approach*, Courier Corporation.
53. Ghanem Roger G., Spanos Pol D. (1991), "Spectral Stochastic Finite- Element Formulation for Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics* 117(10), pp. 2351-2372.
54. Griffiths D.V., Paiboon J., Huang J., Fenton G.A. (2012), "Homogenization of geomaterials containing voids by random fields and finite elements", *International Journal of Solids and Structures* 49(14), pp. 2006-2014.
55. Grigoriu M. (2006), "Evaluation of Karhunen–Loève, Spectral, and Sampling Representations for Stochastic Processes", *Journal of Engineering Mechanics* 132(2), pp. 179-189.
56. Guedes J., Kikuchi N. (1990), "Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83(2), pp. 143-198.
57. Guo T., Frangopol D.M., Chen Y. (2012), "Fatigue reliability assessment of steel bridge details integrating weigh-in-motion data and probabilistic finite element analysis", *Computers & Structures* 112-113, pp. 245-257.
58. Gupta S., Manohar C.S. (2002), "Dynamic stiffness method for circular stochastic timoshenko beams: response variability and reliability analyses", *Journal of Sound and Vibration* 253(5), pp. 1051-1085.
59. Halder A., Mahadevan S. (2000), *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*, John Wiley & Sons.
60. Hatami-Marbini H., Shahsavari A., Picu R.C. (2013), "Multiscale modeling of semiflexible random fibrous structures", *Computer-Aided Design* 45(1), pp. 77-83.
61. Himeur N., Menasria A., Bouhadra A., Mourad C., Refrafi S., Guessoum L., Ouchene A., Lebouazda S. (2024), "Buckling and bending analysis of porous fg beam using a simple integral QUASI-3D theory", *Journal of Applied Mathematics Computational Mechanics* 23(4), pp. 30-41.
62. Hoang Xuan Nguyen, Ta Duy Hien, Lee J., Nguyen Xuan Hung (2017), "Stochastic buckling behaviour of laminated composite structures with uncertain material properties", *Aerospace Science and Technology* 66, pp. 274-283.
63. Hosseini S., Khadem S. (2005), "Free vibration analysis of rotating beams with random properties", *Structural Engineering and Mechanics*, 20(3), pp. 293-312.
64. Hughes I., Hase T. (2010), *Measurements and their uncertainties: a practical guide to modern error analysis*, OUP Oxford.

65. Hurtado J.E., Barbat A.H. (1998), "Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics", *Archives of Computational Methods in Engineering* 5(1), pp. 3-29.
66. Ibrahim A.R., Makhloof D.A. (2024), "Stochastic analysis and reliability assessment of critical RC structural components considering material properties uncertainty", *Structural Safety* 107, pp. 102412.
67. Jeong G.Y. (2008), *Tensile properties of loblolly pine strands using digital image correlation and stochastic finite element method*, Ph.D. dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
68. Jeong G.Y., Hindman D.P. (2009), "Ultimate tensile strength of loblolly pine strands using stochastic finite element method", *Journal of Materials Science* 44(14), pp. 3824-3832.
69. Kala Z., Jan V., and Jönsson J. (2017), "Random fields of initial out of straightness leading to column buckling", *Journal of Civil Engineering and Management* 23(7), pp. 902-913.
70. Kamiński M., Świta P. (2015), "Structural stability and reliability of the underground steel tanks with the Stochastic Finite Element Method", *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 15(2), pp. 593-602.
71. Kardara A., Bucher C.G., Shinozuka M. (1989), "Structural Response Variability III", *Journal of Engineering Mechanics* 115(8), pp. 1726-1747.
72. Knabe W., Przewłócki J., Różyński G. (1998), "Spatial averages for linear elements for two-parameter random field", *Probabilistic Engineering Mechanics* 13(3), pp. 147-167.
73. Koizumi M. (1997), "FGM activities in Japan", *Composites Part B: Engineering* 28(1), pp. 1-4.
74. Kurtz S.M., Edidin A. (2006), *Spine technology handbook*, Elsevier.
75. Laz P.J., Browne M. (2010), "A review of probabilistic analysis in orthopaedic biomechanics", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine* 224(8), pp. 927-943.
76. Le Minh Thai, Doan Trac Luat, Tran Van Ke, Minh Phung Van (2023), "Finite-Element Modeling for Static Bending Analysis of Rotating Two-Layer FGM Beams with Shear Connectors Resting on Imperfect Elastic Foundations", *Journal of Aerospace Engineering* 36(3), pp. 04023013.
77. Li C.C., Der Kiureghian A. (1993), "Optimal Discretization of Random Fields", *Journal of Engineering Mechanics* 119(6), pp. 1136-1154.

78. Logan D.L. (2011), *A first course in the finite element method*, Thomson.
79. Ly Hai Bang, Desceliers C., Le Lu Minh, Le Tien Thinh, Pham Thai Binh, Nguyen Ngoc Long, Doan Van Thuan, Le Minh (2019), "Quantification of Uncertainties on the Critical Buckling Load of Columns under Axial Compression with Uncertain Random Materials", *Materials* 12(11), pp. 1828.
80. Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G., Guedes Soares C. (1997), "Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids-Stochastic finite elements", *Structural Safety* 19(3), pp. 283-336.
81. Moens D., Vandepitte D. (2006), "Recent advances in non-probabilistic approaches for non-deterministic dynamic finite element analysis", *Archives of Computational Methods in Engineering* 13(3), pp. 389-464.
82. Nguyen Phu Cuong, Nguyen Van Thuan, Ta Duy Hien. Stochastic Free Vibration Analysis of Beam on Elastic Foundation with the Random Field of Young's Modulus Using Finite Element Method and Monte Carlo Simulation 2022;499-506.
83. Nguyen Thi Nhung, Ta Duy Hien, Nguyen Van Thuan, Dao Ngoc Tien (2022), "Stochastic finite element analysis of the free vibration of non-uniform beams with uncertain material", *Journal of Materials Engineering Structures «JMES»* 9(1), pp. 29-37.
84. Nguyen Van Thuan, Chun N.H. The Stochastic Finite Element in the Natural Frequency of Functionally Graded Material Beams *Mechanics of Functionally Graded Materials and Structures*. IntechOpen.
85. Nguyen Van Thuan, Ta Duy Hien (2020), "Stochastic Perturbation-Based Finite Element for Free Vibration of Functionally Graded Beams with an Uncertain Elastic Modulus", *Mechanics of Composite Materials* 56(4), pp. 485-496.
86. Niemeyer F., Wilke H.-J., Schmidt H. (2012), "Geometry strongly influences the response of numerical models of the lumbar spine—A probabilistic finite element analysis", *Journal of Biomechanics* 45(8), pp. 1414-1423.
87. Noh H.-C., Hyuk-Chun (2011), "Stochastic finite element analysis of composite plates considering spatial randomness of material properties and their correlations", *International Association of Structural Engineering And Mechanics* 11(2), pp. 115-130.
88. Noh H.C. (2014), "Evaluation of Response Variability of Functionally Graded Material Beam with Varying Sectional Area due to Spatial Randomness in Elastic Modulus along Axial Direction", *Computational Structural Engineering Institute of Korea* 27(3), pp. 199.

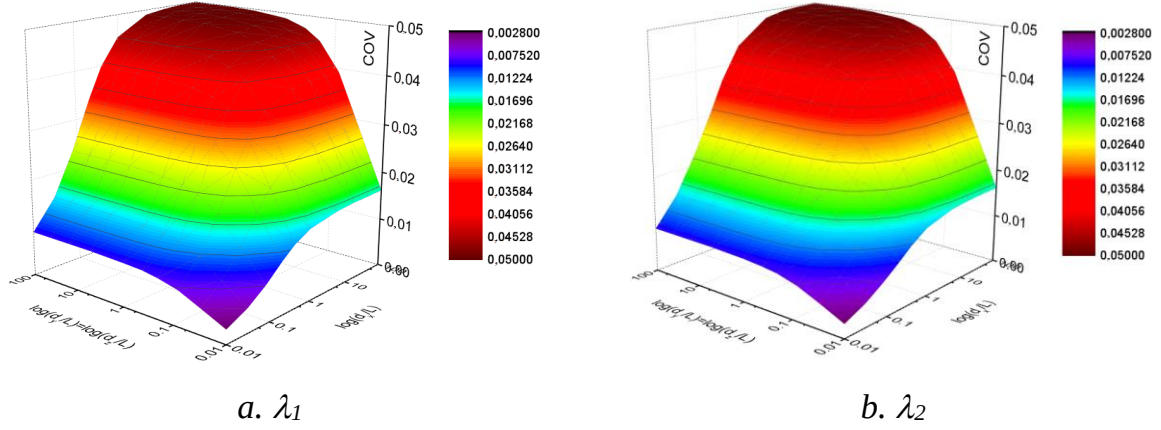
89. Nouy A. (2009), "Recent Developments in Spectral Stochastic Methods for the Numerical Solution of Stochastic Partial Differential Equations", *Archives of Computational Methods in Engineering* 16(3), pp. 251-285.
90. Ohser J., Schladitz K. (2009), *3D images of materials structures: processing and analysis*, John Wiley & Sons.
91. Ostoja-Starzewski M., Woods A. (2003), "Spectral finite elements for vibrating rods and beams with random field properties", *Journal of Sound and Vibration* 268(4), pp. 779-797.
92. Paiboon J., Griffiths D.V., Huang J., Fenton G.A. (2013), "Numerical analysis of effective elastic properties of geomaterials containing voids using 3D random fields and finite elements", *International Journal of Solids and Structures* 50(20), pp. 3233-3241.
93. Papadopoulos V., Stefanou G., Papadrakakis M. (2009), "Buckling analysis of imperfect shells with stochastic non-Gaussian material and thickness properties", *International Journal of Solids and Structures* 46(14), pp. 2800-2808.
94. Peng W., He T. (2021), "Elastoplastic nonlinear analysis of functionally graded beams utilizing the symplectic method", *Archive of Applied Mechanics* 91(12), pp. 4735-4750.
95. Pham Hoang Anh, Nguyen Ba Duan, Vu Tien Chuong. Fuzzy Uncertainty Propagation in FGM Beam using Taylor's Expansion. *Engineering Mechanics and Automation (ICEMA - 2023)*;190-194.
96. Phoon K.K., Huang S.P., Quek S.T. (2002), "Simulation of second-order processes using Karhunen–Loeve expansion", *Computers & Structures* 80(12), pp. 1049-1060.
97. Puig B., Akian J.-L. (2004), "Non-Gaussian simulation using Hermite polynomials expansion and maximum entropy principle", *Probabilistic Engineering Mechanics* 19(4), pp. 293-305.
98. Puig B., Poirion F., Soize C. (2002), "Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion: convergences and algorithms", *Probabilistic Engineering Mechanics* 17(3), pp. 253-264.
99. Ren Y.J., Elishakoff I., Shinozuka M. (1997), "Finite Element Method for Stochastic Beams Based on Variational Principles", *Journal of Applied Mechanics* 64(3), pp. 664-669.
100. Ross C.F., Berthaume M.A., Dechow P.C., Iriarte-Diaz J., Porro L.B., Richmond B.G., Spencer M., Strait D. (2011), "In vivo bone strain and finite-element modeling

- of the craniofacial haft in catarrhine primates", *Journal of Anatomy* 218(1), pp. 112-141.
101. Sakamoto S., Ghanem R. (2002), "Polynomial Chaos Decomposition for the Simulation of Non-Gaussian Nonstationary Stochastic Processes", *Journal of Engineering Mechanics* 128(2), pp. 190-201.
 102. Sakata S., Ashida F., Ohsumimoto K. (2013), "Stochastic homogenization analysis of a porous material with the perturbation method considering a microscopic geometrical random variation", *International Journal of Mechanical Sciences* 77, pp. 145-154.
 103. Sasikumar P., Suresh R., Gupta S. (2014), "Stochastic finite element analysis of layered composite beams with spatially varying non-Gaussian inhomogeneities", *Acta Mechanica* 225(6), pp. 1503-1522.
 104. Schuëller G.I. (2006), "Developments in stochastic structural mechanics", *Archive of Applied Mechanics* 75(10), pp. 755-773.
 105. Shariyat M., Ghahnavieh M.R. (2013), "Reliability Analysis of Beams with both Random Material Properties and Random Loading Conditions", *Journal Of Applied Computational Sciences in Mechanics* 24(1), pp. 1-18.
 106. Shinozuka M. (1987), "Structural Response Variability", *Journal of Engineering Mechanics* 113(6), pp. 825-842.
 107. Shinozuka M., Deodatis G. (1991), "Simulation of Stochastic Processes by Spectral Representation", *Applied Mechanics Reviews* 44(4), pp. 191-204.
 108. Shinozuka M., Jan C.M. (1972), "Digital simulation of random processes and its applications", *Journal of Sound and Vibration* 25(1), pp. 111-128.
 109. Siegkas P., Tagarielli V., Petrinic N. (2014), "Modelling Stochastic Foam Geometries for FE Simulations Using 3D Voronoi Cells", *Procedia Materials Science* 4, pp. 221-226.
 110. Sotomayor O.E., Tippur H.V. (2014), "Role of cell regularity and relative density on elastoplastic compression response of 3-D open-cell foam core sandwich structure generated using Voronoi diagrams", *Acta Materialia* 78, pp. 301-313.
 111. Spanos P.D., Kotsos A. (2008), "A multiscale Monte Carlo finite element method for determining mechanical properties of polymer nanocomposites", *Probabilistic Engineering Mechanics* 23(4), pp. 456-470.
 112. Spanos Pol D., Beer M., Red-Horse J. (2007), "Karhunen–Loève Expansion of Stochastic Processes with a Modified Exponential Covariance Kernel", *Journal of Engineering Mechanics* 133(7), pp. 773-779.

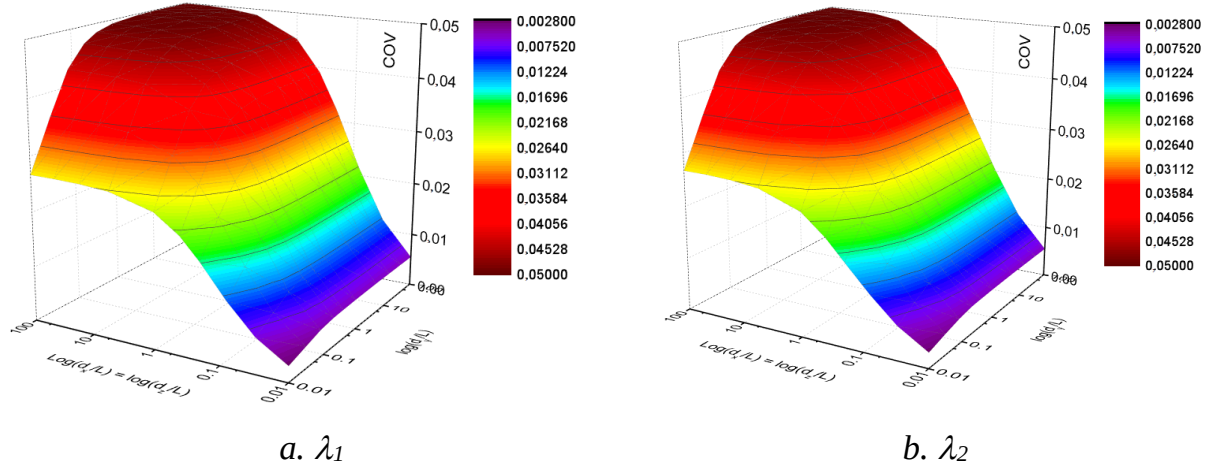
113. Stefanou G. (2009), "The stochastic finite element method: Past, present and future", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198(9), pp. 1031-1051.
114. Strait D.S., Wang Q., Dechow P.C., Ross C.F., Richmond B.G., Spencer M.A., Patel B.A. (2005), "Modeling elastic properties in finite-element analysis: How much precision is needed to produce an accurate model?", *The Anatomical Record Part A: Discoveries in Molecular, Cellular, and Evolutionary Biology* 283A(2), pp. 275-287.
115. Sudret B., Der Kiureghian A. (2000), *Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report*, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California
116. Ta Duy Hien (2020), "A static analysis of nonuniform column by stochastic finite element method using weighted integration approach", *Transport and Communications Science Journal* 71(4), pp. 359-367.
117. Ta Duy Hien, Nguyen Duy Hung, Nguyen Trung Kien, Noh H.C. (2019), "The variability of dynamic responses of beams resting on elastic foundation subjected to vehicle with random system parameters", *Applied Mathematical Modelling* 67, pp. 676-687.
118. Tai K., Dao M., Suresh S., Palazoglu A., Ortiz C. (2007), "Nanoscale heterogeneity promotes energy dissipation in bone", *Nature Materials* 6(6), pp. 454-462.
119. Takada T. (1990), "Weighted integral method in multi-dimensional stochastic finite element analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics* 5(4), pp. 158-166.
120. Takada T. (1990), "Weighted integral method in stochastic finite element analysis", *Probabilistic Engineering Mechanics* 5(3), pp. 146-156.
121. Vanmarcke E., Grigoriu M. (1983), "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams", *Journal of Engineering Mechanics* 109(5), pp. 1203-1214.
122. Vryzidis I., Stefanou G., Papadopoulos V. (2013), "Stochastic stability analysis of steel tubes with random initial imperfections", *Finite Elements in Analysis and Design* 77, pp. 31-39.
123. Wang J. Analysis of Mechanical Behavior for FGM Beams Under Thermal Loading. 2023 2nd International Conference on Artificial Intelligence and Computer Information Technology (AICIT) 2023;1-6.
124. Wang Q., Dechow P.C. (2006), "Elastic properties of external cortical bone in the craniofacial skeleton of the rhesus monkey", *American Journal of Physical Anthropology* 131(3), pp. 402-415.

125. Waubke H., Grundmann H. (1996), *Dynamische Berechnungen für den Halbraum mit streuenden Parametern mittels orthogonaler Polynome*, Ph.D. Thesis, Technische Universität München, München.
126. Wu Z., Huang B., Li Y., Pu W. (2017), "A Statistical Model Updating Method of Beam Structures with Random Parameters under Static Load", *Applied Sciences* 7(6), pp. 601.
127. Wu Z., Huang B., Tee K.F., Zhang W. (2021), "A Novel Stochastic Approach for Static Damage Identification of Beam Structures Using Homotopy Analysis Algorithm", *Sensors* 21(7), pp. 2366.
128. Xiu D., Karniadakis G.E. (2002), "The Wiener--Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations", *SIAM Journal on Scientific Computing* 24(2), pp. 619-644.
129. Yamazaki F., Shinozuka M. (1988), "Digital Generation of Non- Gaussian Stochastic Fields", *Journal of Engineering Mechanics* 114(7), pp. 1183-1197.
130. Yao L., He P., Song S. (2010), "A perturbation stochastic finite-element method for groundwater flow models based on an undetermined-coefficients approach", *Hydrogeology Journal* 18(7), pp. 1603-1609.
131. Yavari V., Kadivar M.H. (2012), "Application of stochastic finite element method in estimation of elastic constants for NCF composites", *Mechanics Research Communications* 40, pp. 69-76.
132. Young W.C., Budynas R.G., Sadegh A.M. (2002), *Roark's formulas for stress and strain*, McGraw-hill New York.
133. Yu Y., Ye J., Wang Y., Zhang B., Qi G. (2013), "A mesoscale ultrasonic attenuation finite element model of composites with random-distributed voids", *Composites Science and Technology* 89, pp. 44-51.
134. Yurdakul Ö., Del Vecchio C., Di Ludovico M., Řoutil L., Avşar Ö. (2019), "Sensitivity of the cyclic response of substandard beam-column joints to material properties", pp.
135. Zhang J., Ellingwood B. (1994), "Orthogonal Series Expansions of Random Fields in Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics* 120(12), pp. 2660-2677.
136. Zhang J., Ellingwood B. (1995), "Effects of Uncertain Material Properties on Structural Stability", 121(4), pp. 705-716.
137. Zhang L., Liao W., Fan J., Feng S. (2024), "A semi-analytical simulation method for bi-directional functionally graded cantilever beams under arbitrary static loads", *Smart Materials Structures* 33(5), pp. 055051."

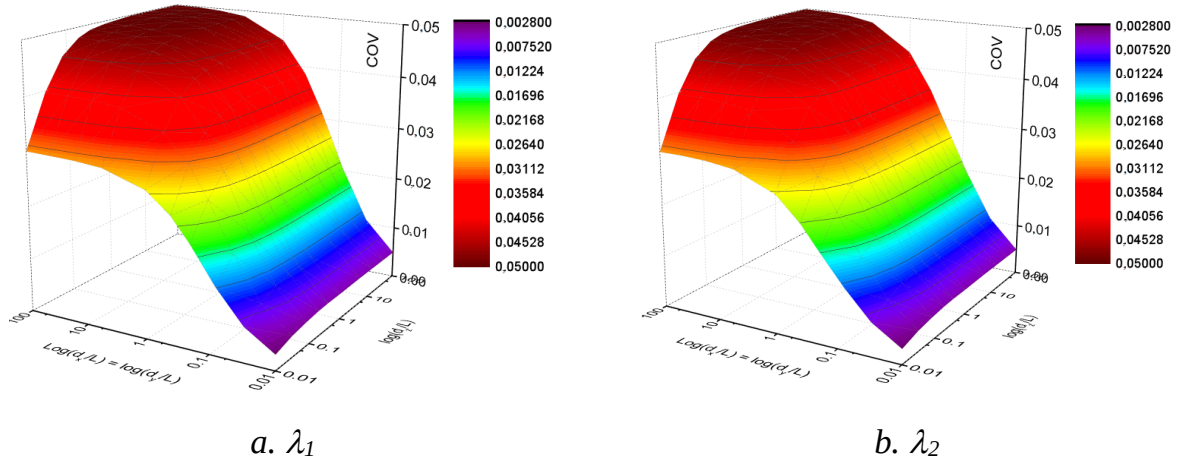
PHỤ LỤC A: ẢNH HƯỞNG CỦA CHIỀU DÀI TƯƠNG QUAN ĐẾN COV ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT



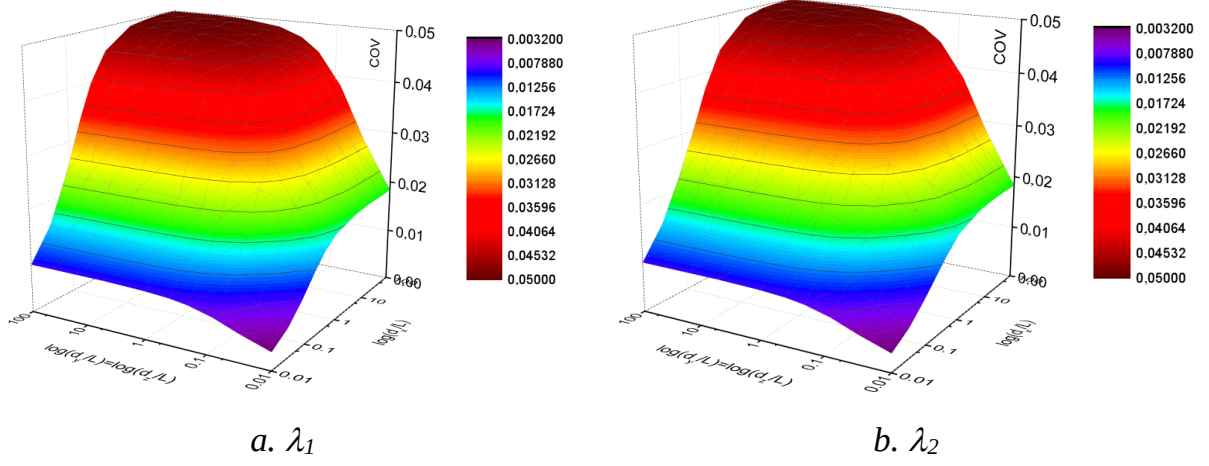
Hình A.1. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$)



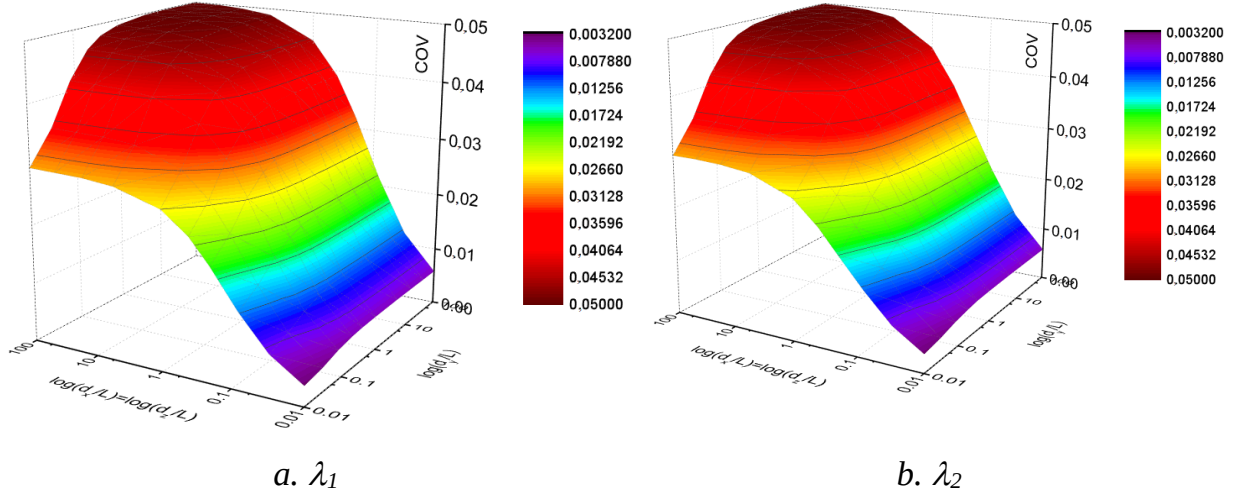
Hình A.2. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$)



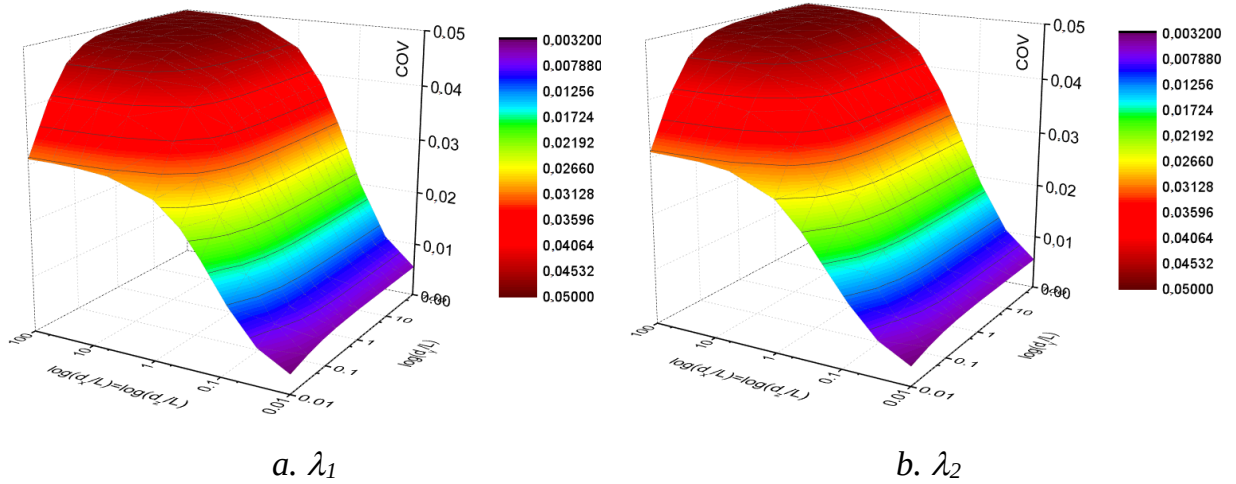
Hình A.3. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mật độ khối lượng ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)



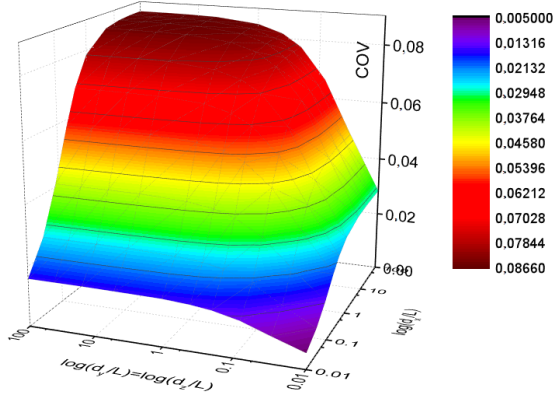
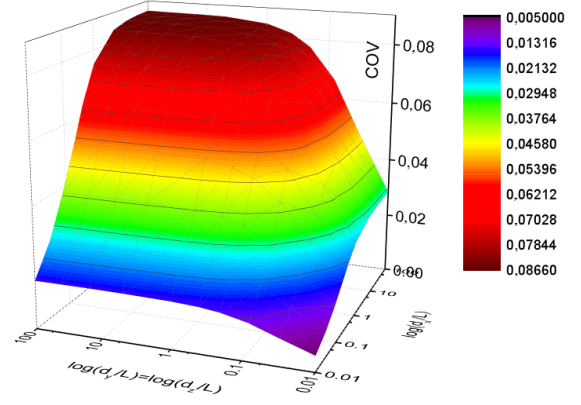
Hình A.4. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$)



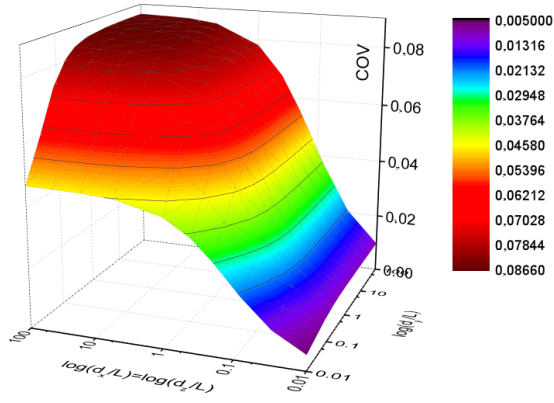
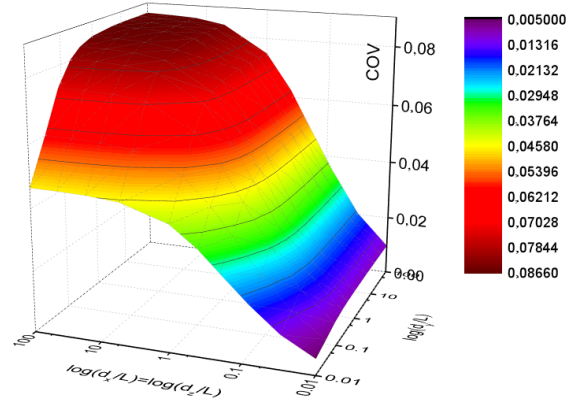
Hình A.5. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$)



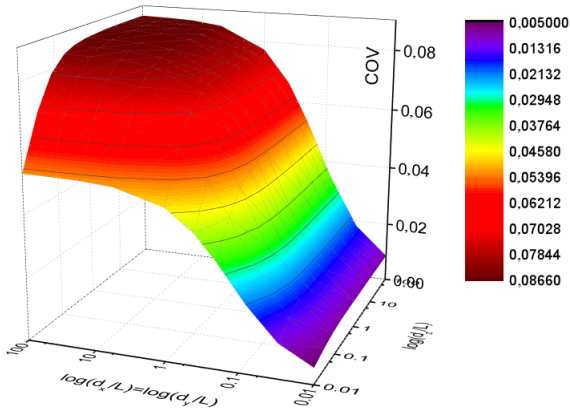
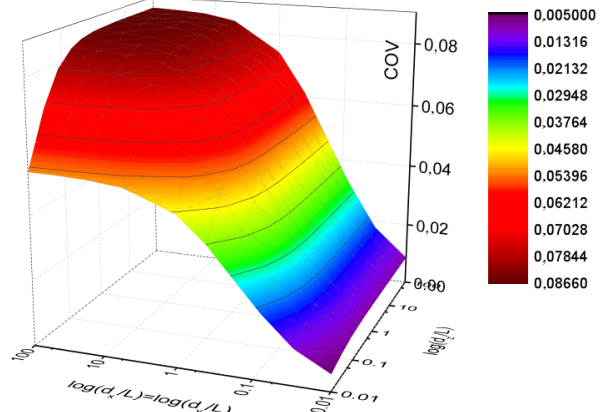
Hình A.6. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)

a. λ_1 b. λ_2

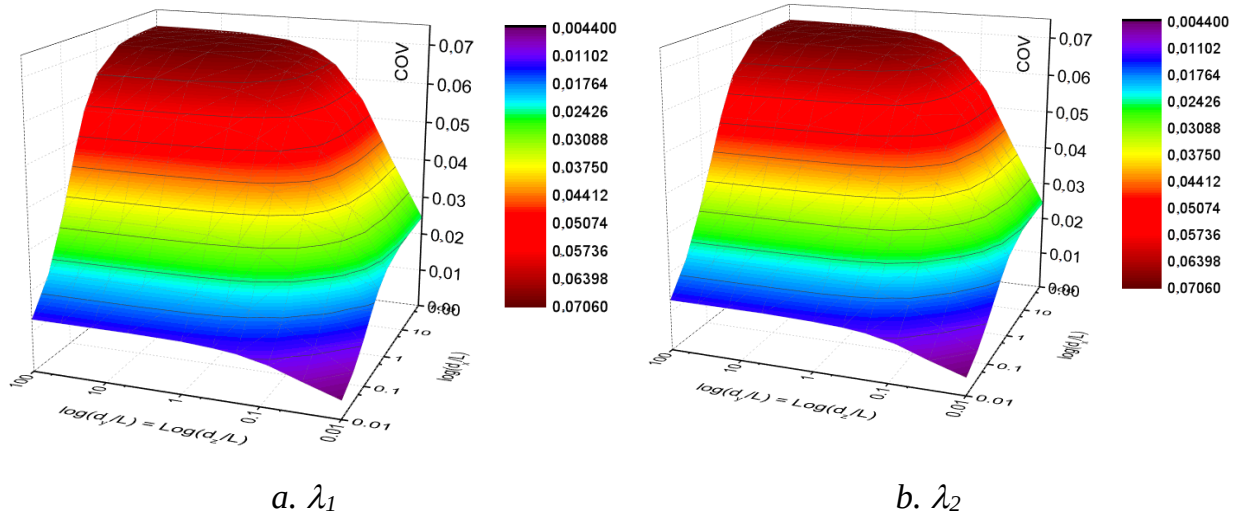
Hình A.7. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, $\gamma = -0,5$)

a. λ_1 b. λ_2

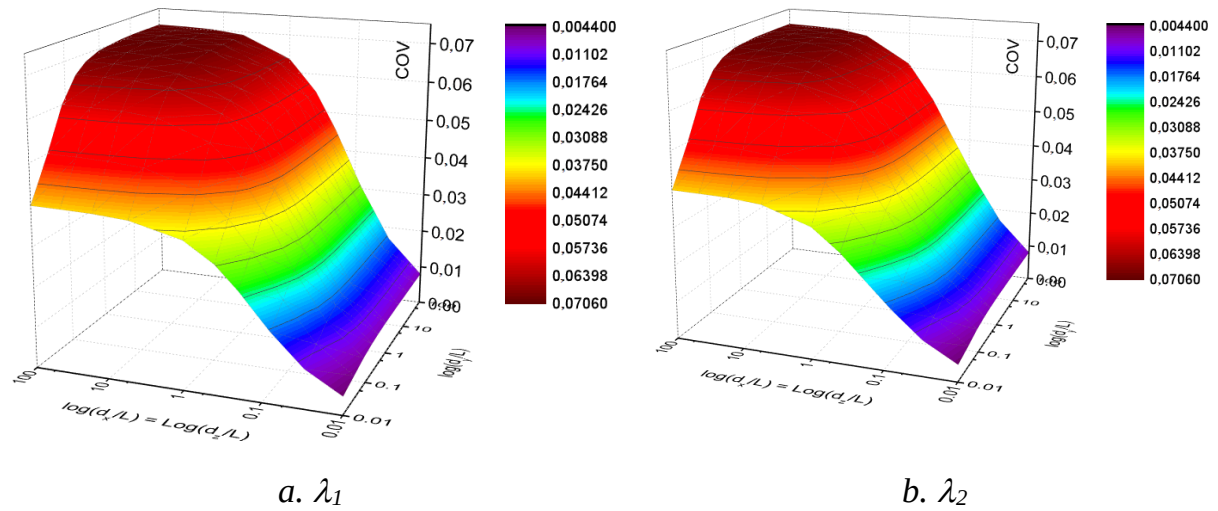
Hình A.8. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, $\gamma = -0,5$)

a. λ_1 b. λ_2

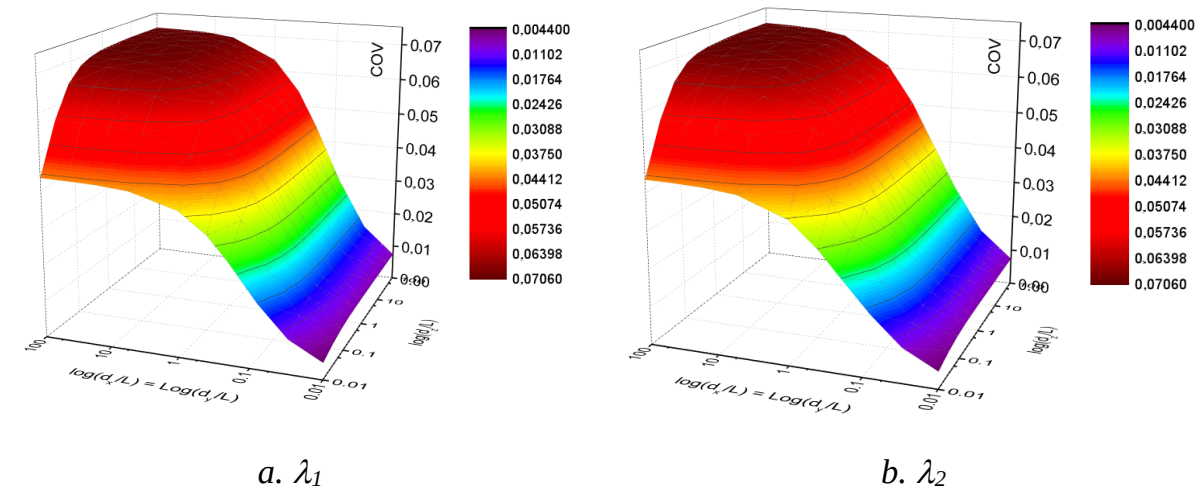
Hình A.9. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, $\gamma = -0,5$)



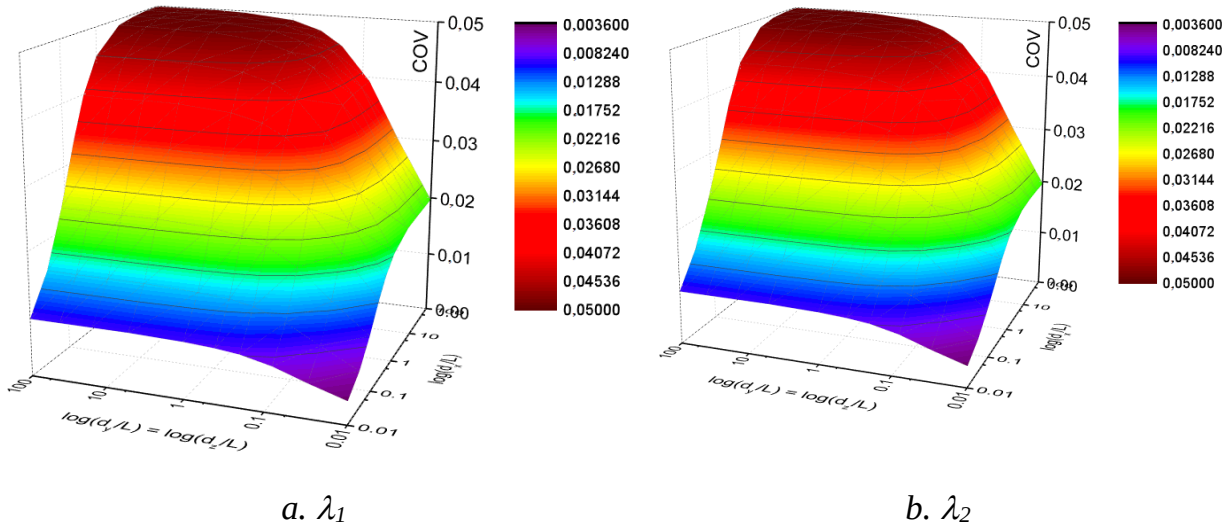
Hình A.10. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp đàn tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, $\gamma = 0$)



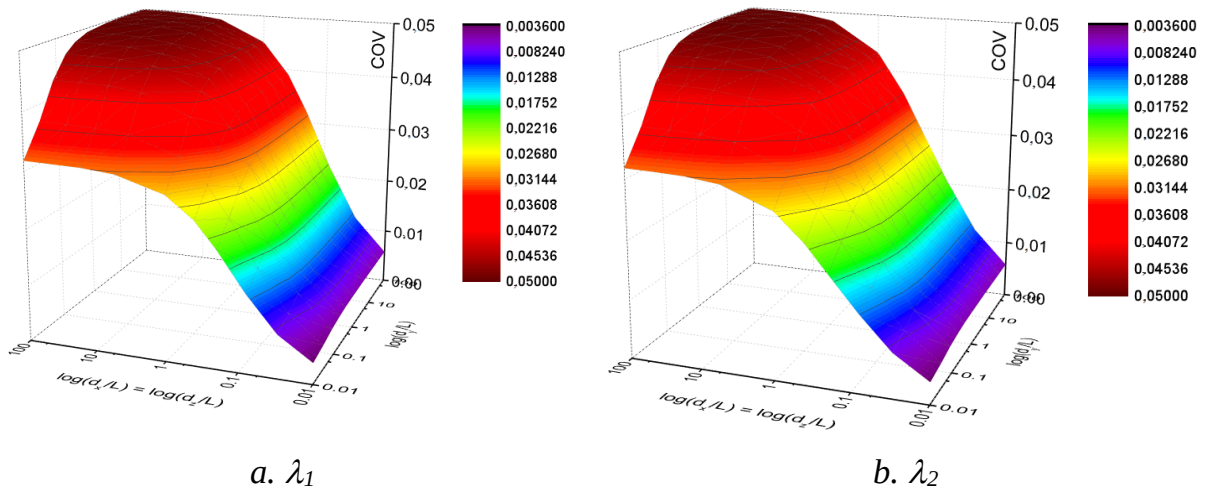
Hình A.11. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp đàn tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, $\gamma = 0$)



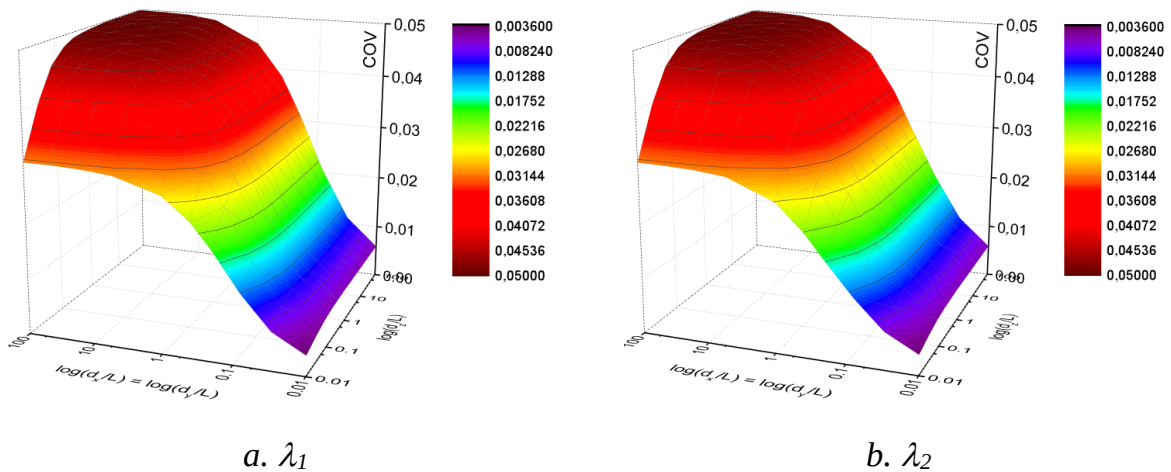
Hình A.12. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp đàn tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, $\gamma = 0$)



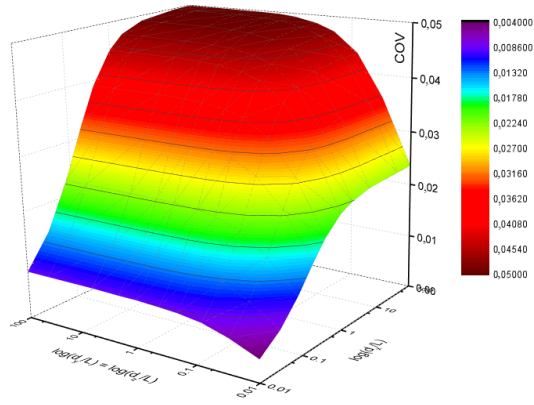
Hình A.13. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$, $\gamma = 0,5$)



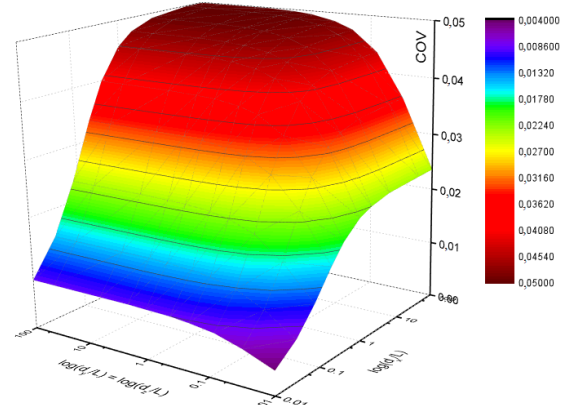
Hình A.14. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$, $\gamma = 0,5$)



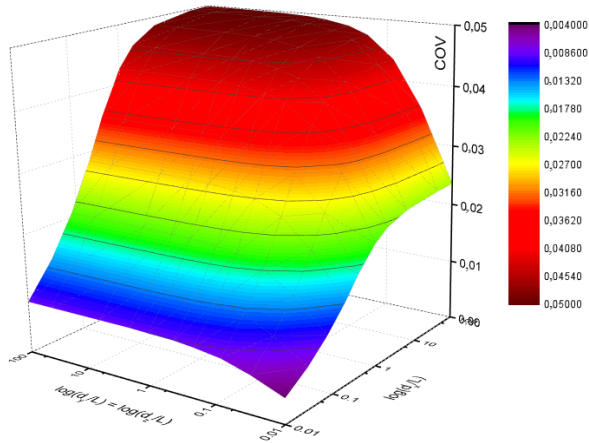
Hình A.15. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của trị riêng trong trường hợp dầm tính chất vật liệu ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$, $\gamma = 0,5$)



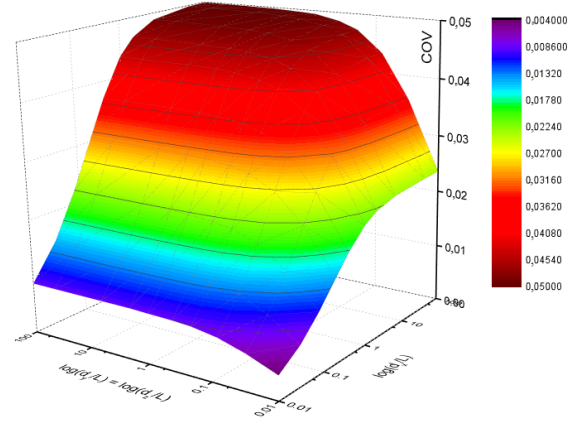
a, Cột C - F



b, Cột H - H

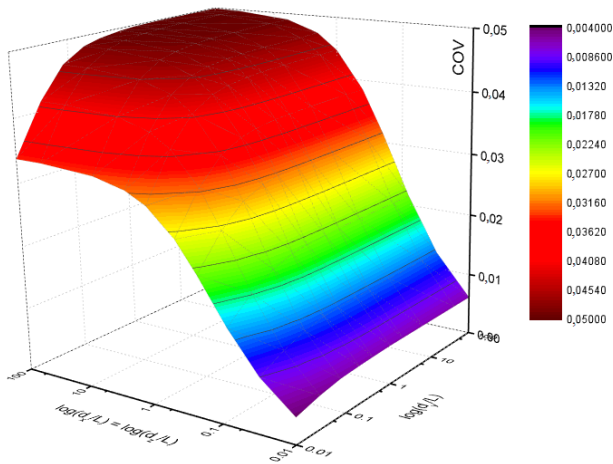


c, Cột C - C

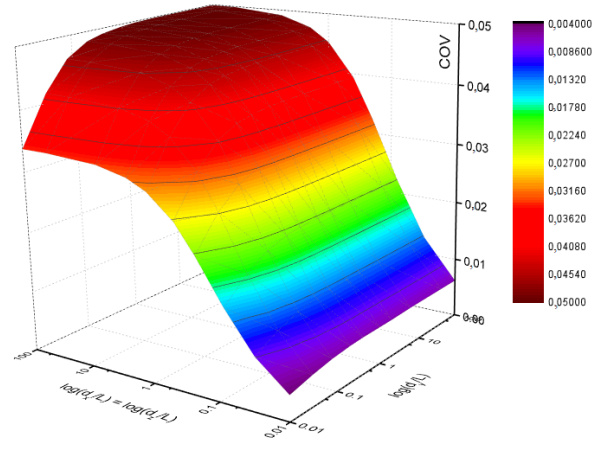


d, Cột C - H

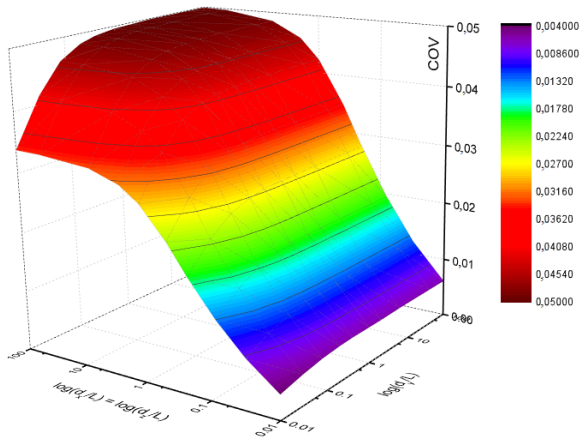
Hình A.16. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_y = d_z$)



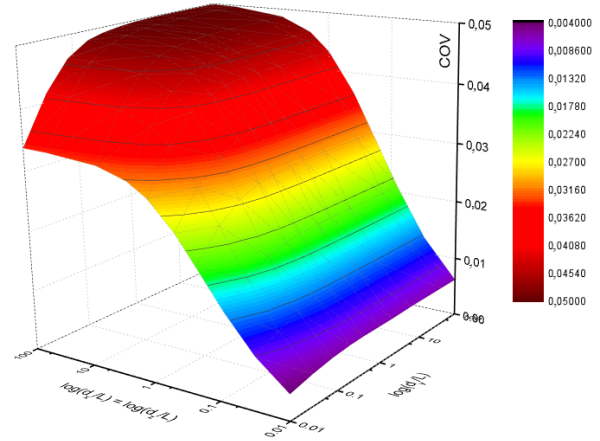
a, Cột C - F



b, Cột H - H

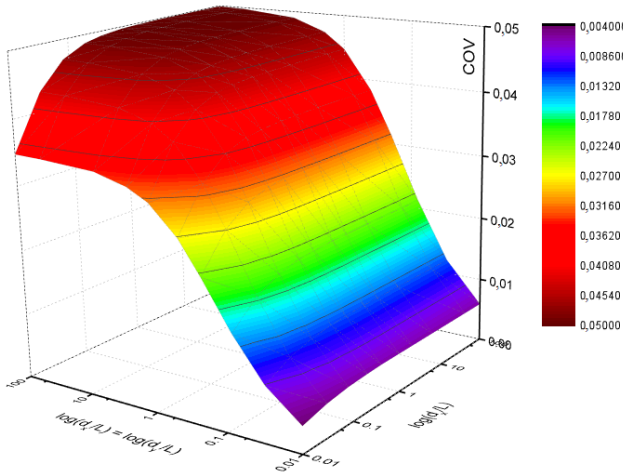


c, Cột C - C

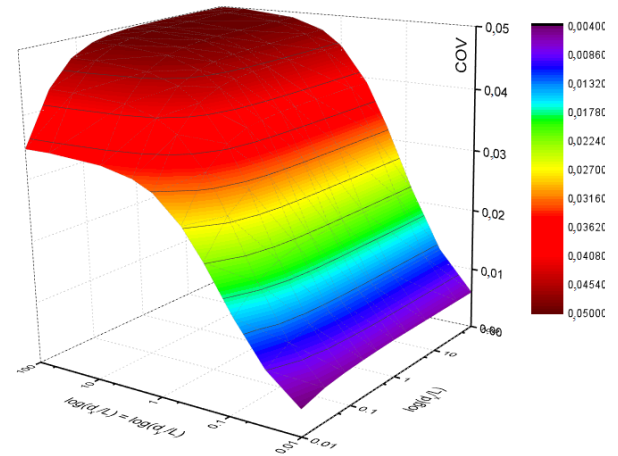


d, Cột C - H

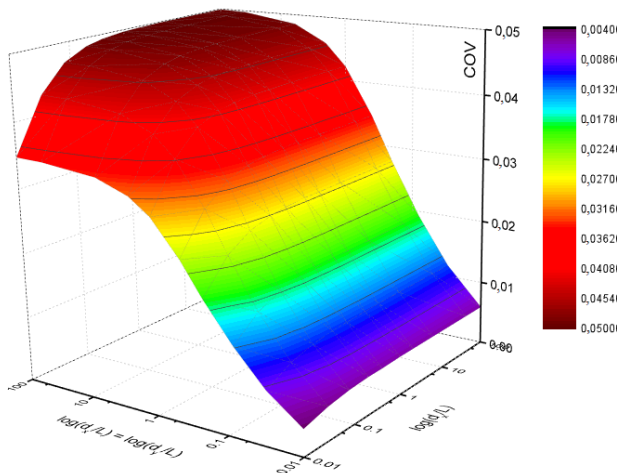
Hình A.17. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_z$)



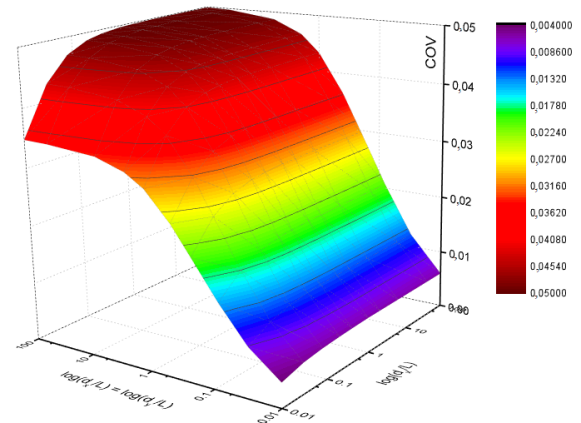
a, Cột C - F



b, Cột H - H



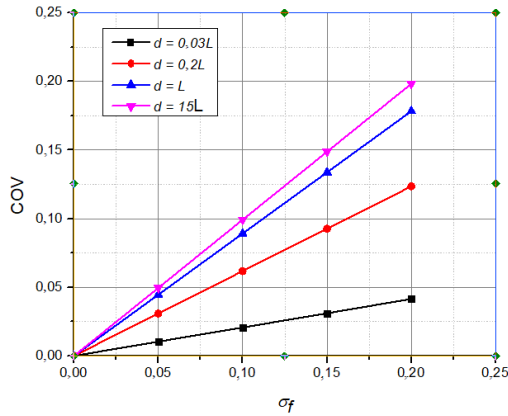
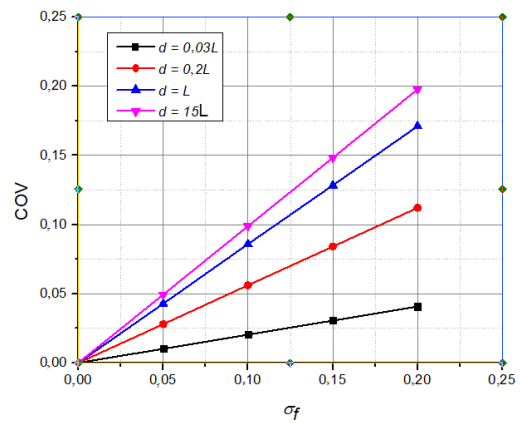
c, Cột C - C



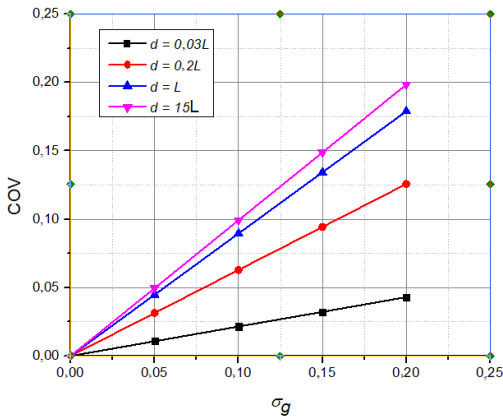
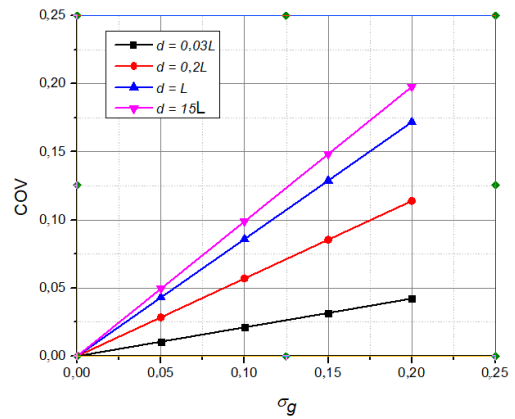
d, Cột C - H

Hình A.18. Ảnh hưởng của chiều dài tương quan đến COV của lực tới hạn trong trường hợp mô đun đàn hồi ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y$)

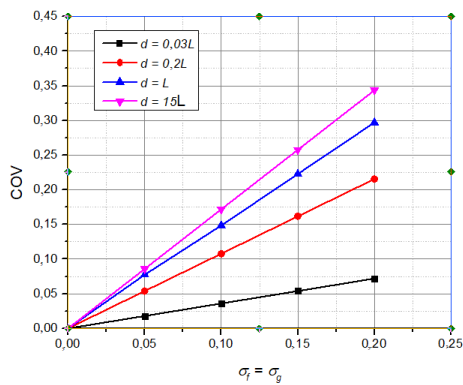
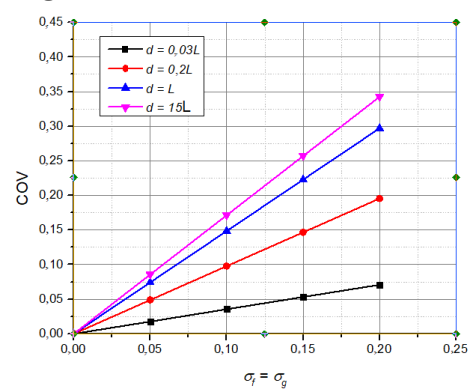
PHỤ LỤC B: QUAN HỆ GIỮA COV TÍNH CHẤT VẬT LIỆU VÀ COV ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT

a. λ_1 b. λ_2

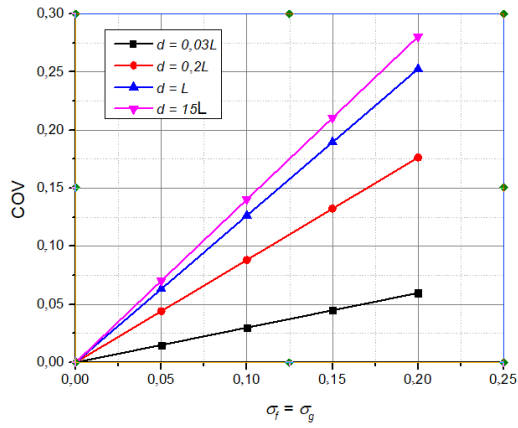
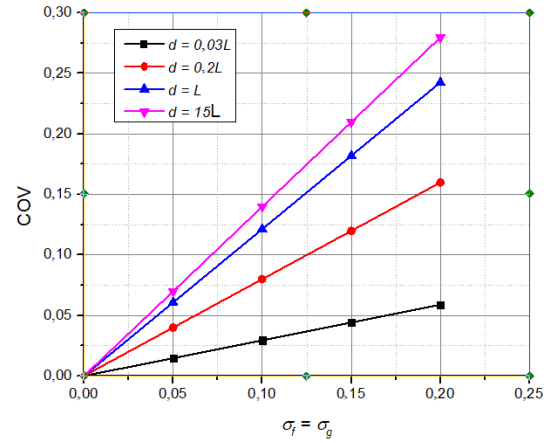
Hình B.1. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mô đun đàn hồi

a. λ_1 b. λ_2

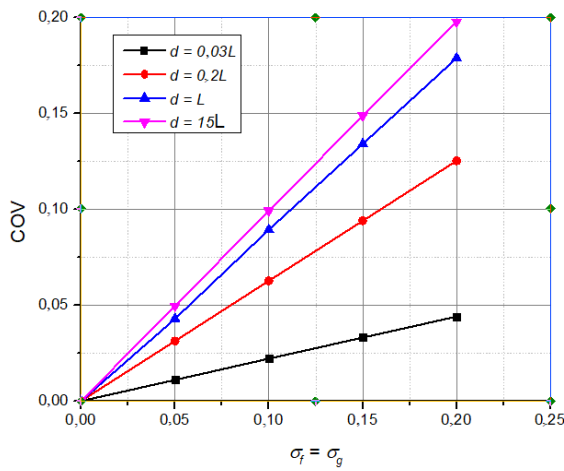
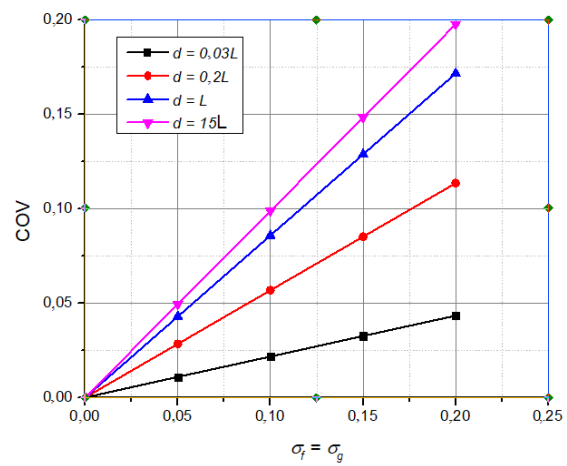
Hình B.2. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của mật độ khối lượng

a. λ_1 b. λ_2

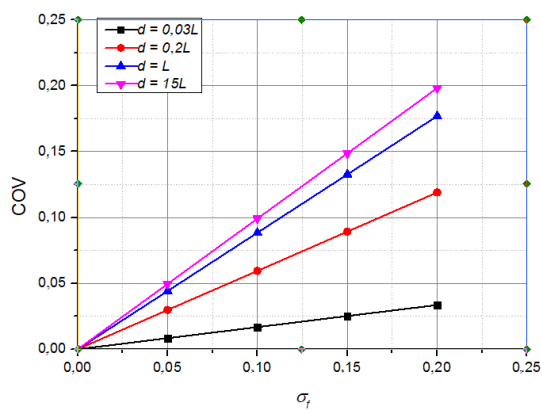
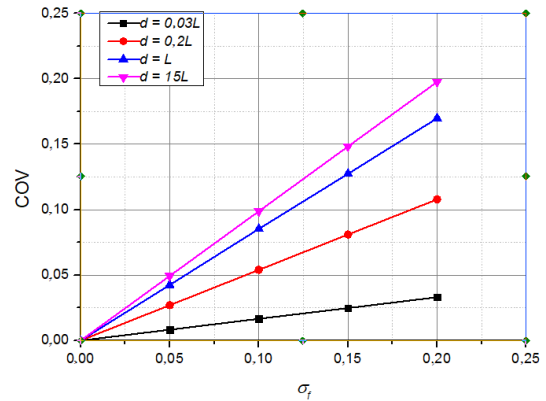
Hình B.3. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = -0.5$)

a. λ_1 b. λ_2

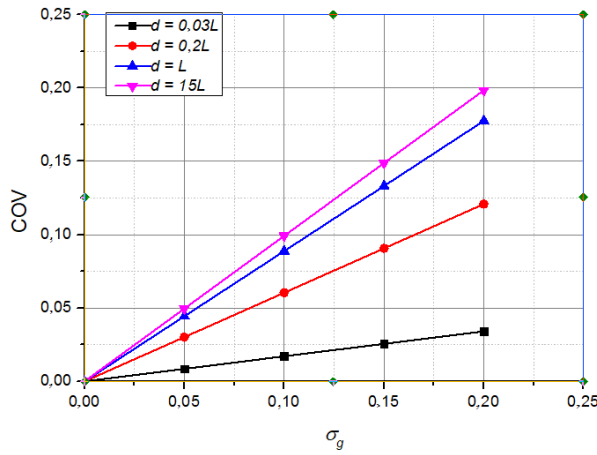
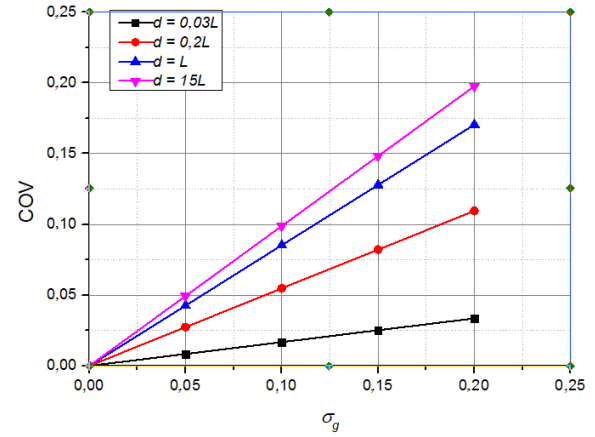
Hình B.4. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0$)

a. λ_1 b. λ_2

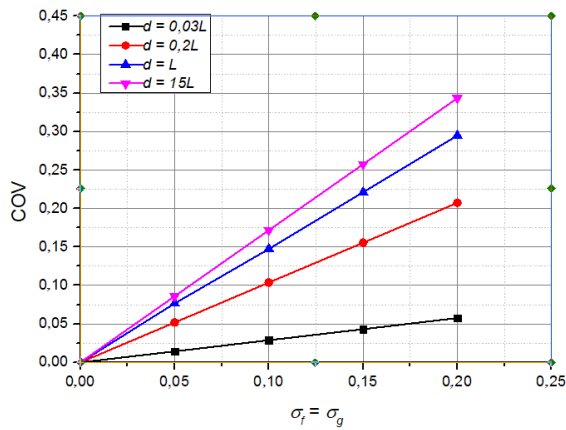
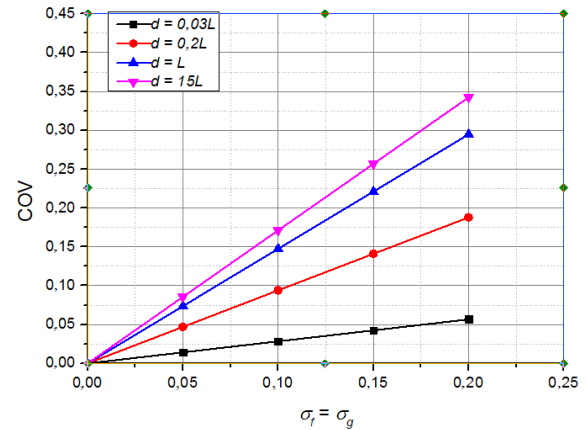
Hình B.5. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0,5$)

a. λ_1 b. λ_2

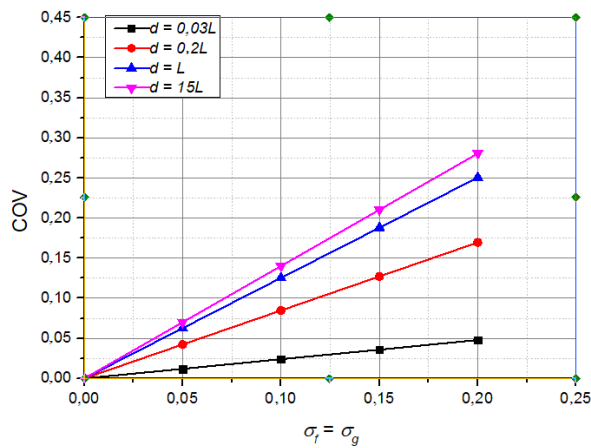
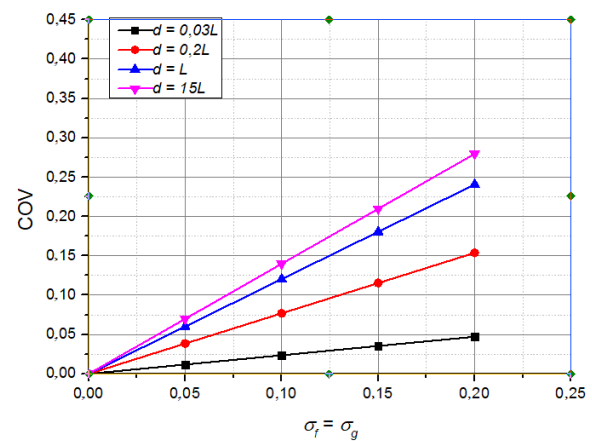
Hình B.6. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mô đun đàn hồi

a. λ_1 b. λ_2

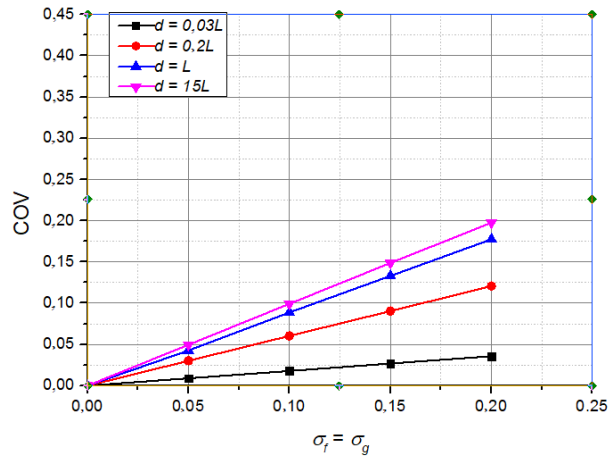
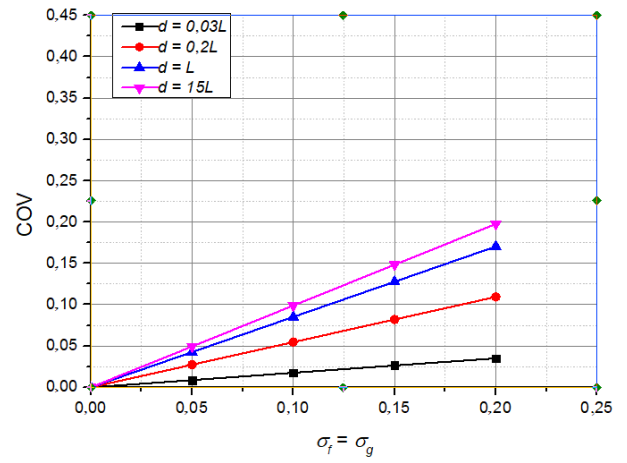
Hình B.7. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của mật độ khối lượng

a. λ_1 b. λ_2

Hình B.8. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = -0,5$)

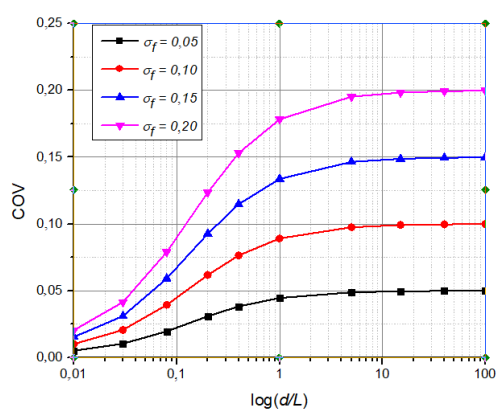
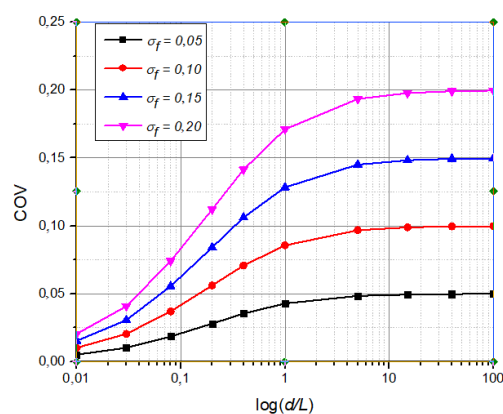
a. λ_1 b. λ_2

Hình B.9. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0$)

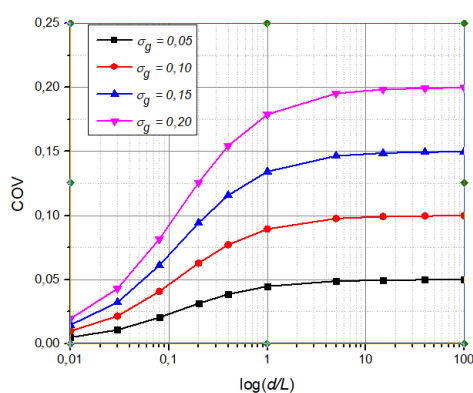
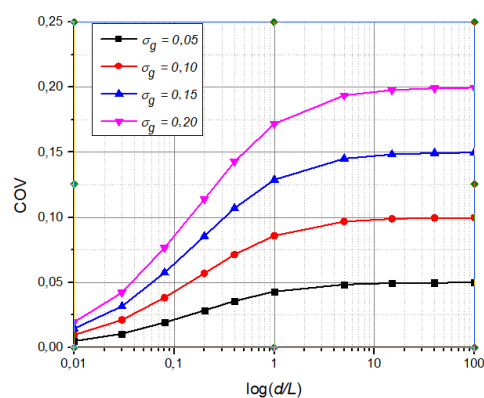
a. λ_1 b. λ_2

Hình B.10. Quan hệ giữa COV của trị riêng và COV của trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu ($\gamma = 0,5$)

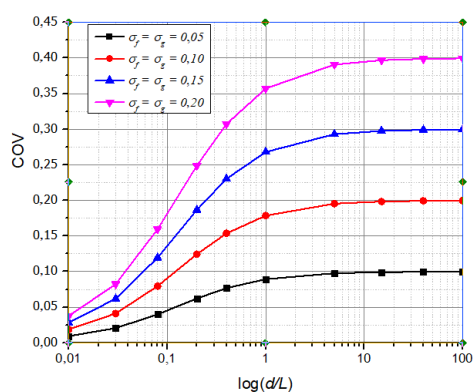
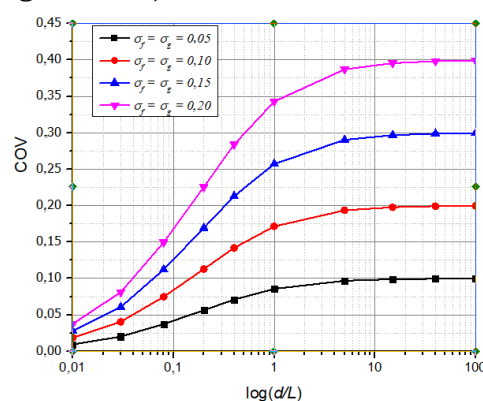
PHỤ LỤC C: ẢNH HƯỞNG ĐỘ LỆCH CHUẨN, HỆ SỐ TƯƠNG QUAN CÁC TRƯỜNG NGẪU NHIÊN ĐẾN COV GIÁ TRỊ RIÊNG

a. λ_1 b. λ_2

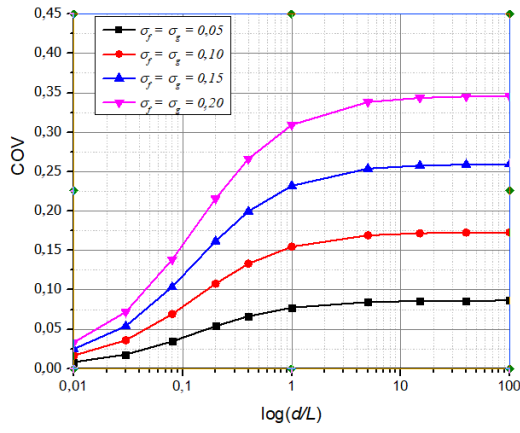
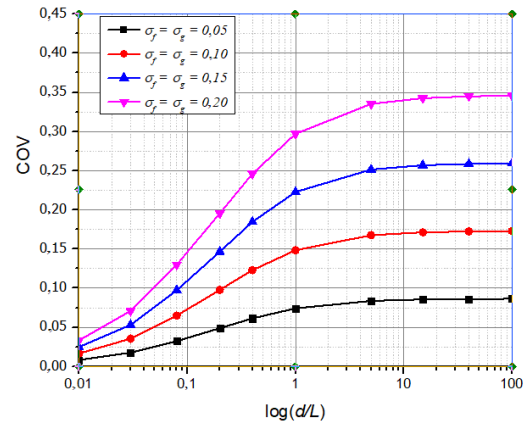
Hình C.1. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mô đun đàn hồi ngẫu nhiên)

a. λ_1 b. λ_2

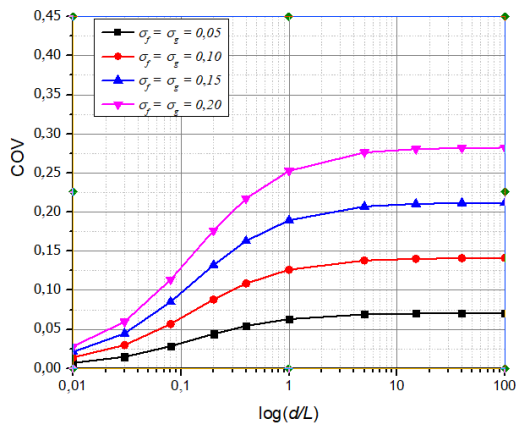
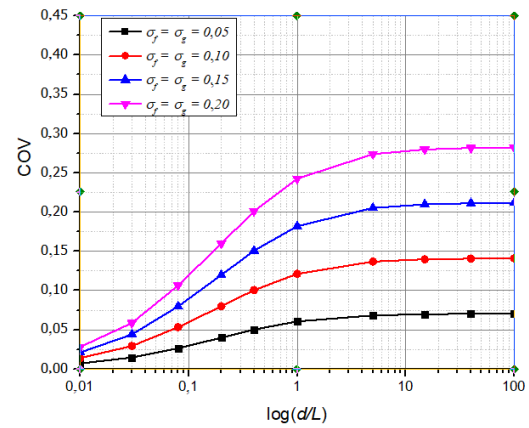
Hình C.2. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV (dầm chỉ có mật độ khối lượng ngẫu nhiên)

a. λ_1 b. λ_2

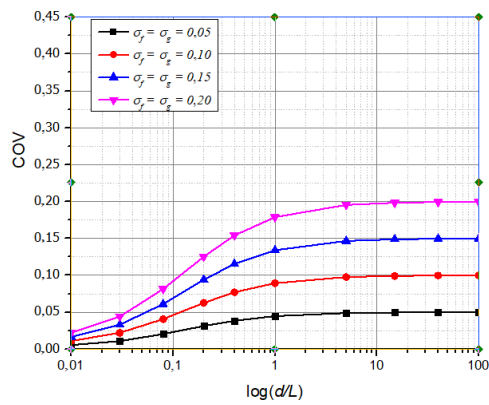
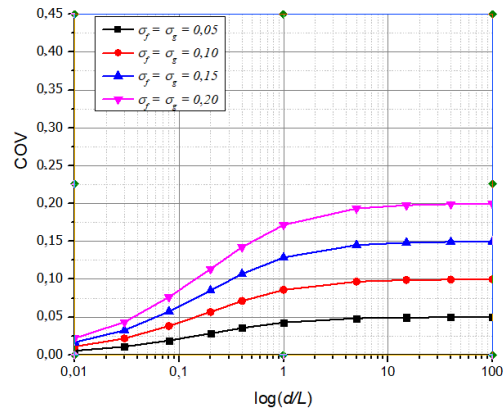
Hình C.3. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -1,0$)

a. λ_1 b. λ_2

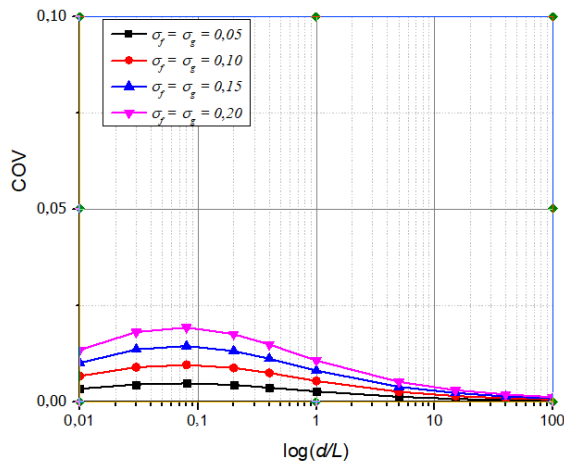
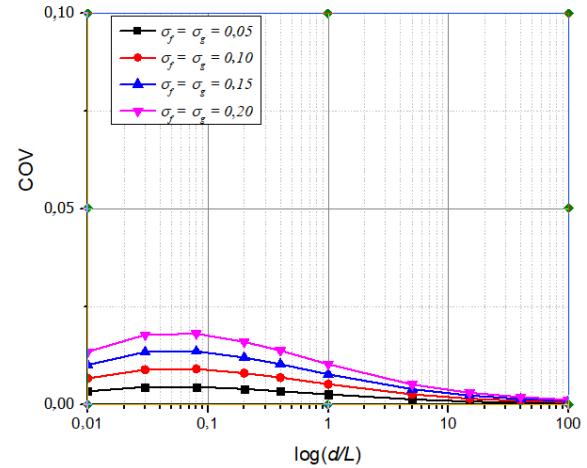
Hình C.4. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = -0,5$)

a. λ_1 b. λ_2

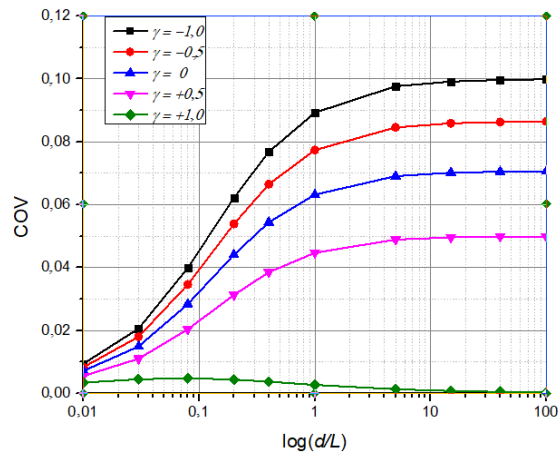
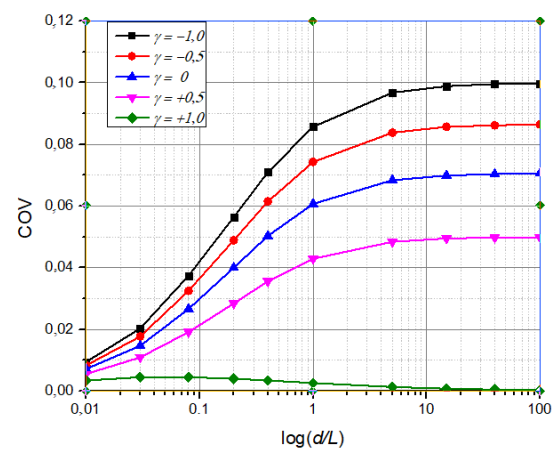
Hình C.5. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0$)

a. λ_1 b. λ_2

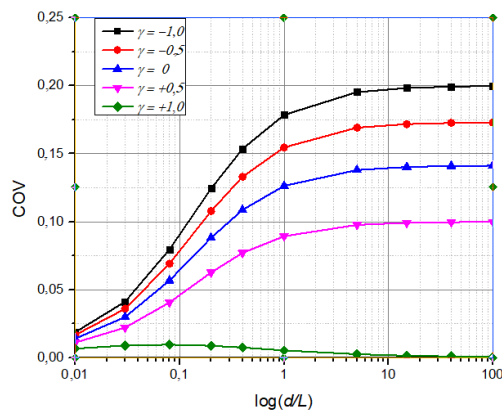
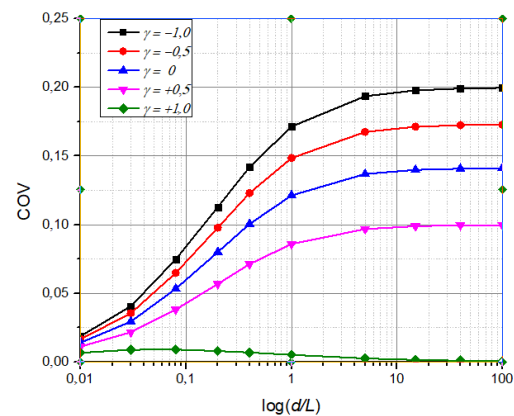
Hình C.6. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 0,5$)

a. λ_1 b. λ_2

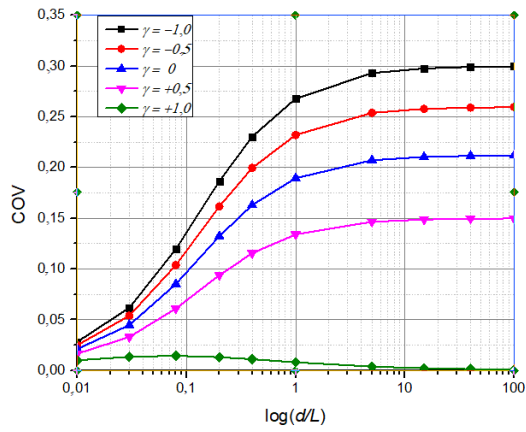
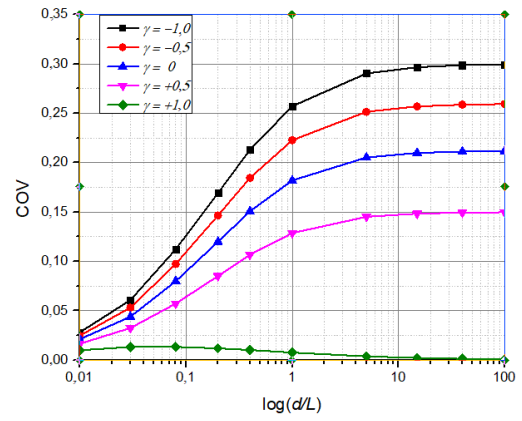
Hình C.7. Ảnh hưởng của độ lệch chuẩn trường ngẫu nhiên hai chiều đến COV của giá trị riêng ($\gamma = 1,0$)

a. λ_1 b. λ_2

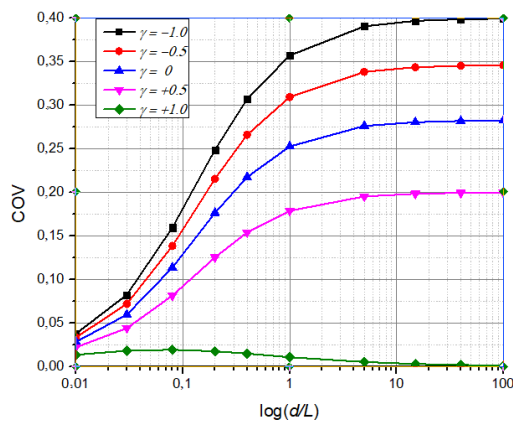
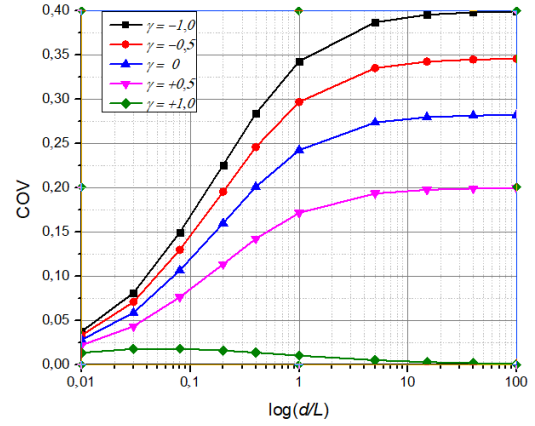
Hình C.8. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,05$)

a. λ_1 b. λ_2

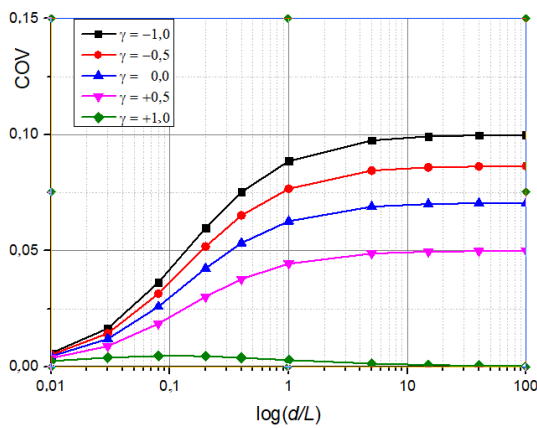
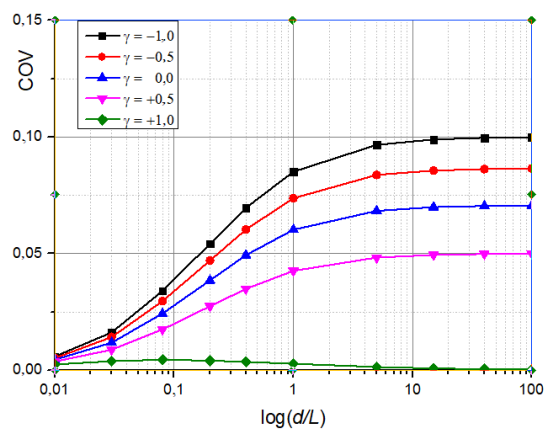
Hình C.9. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,10$)

a. λ_1 b. λ_2

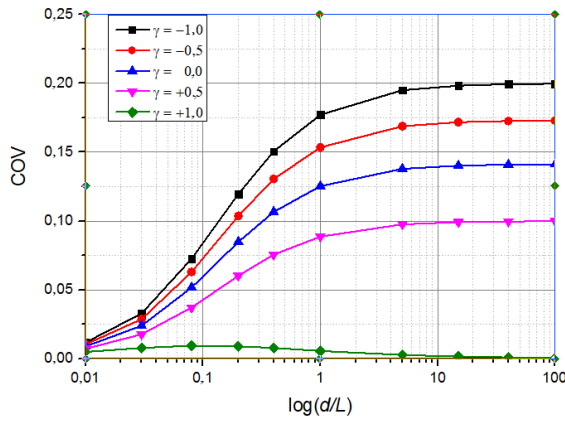
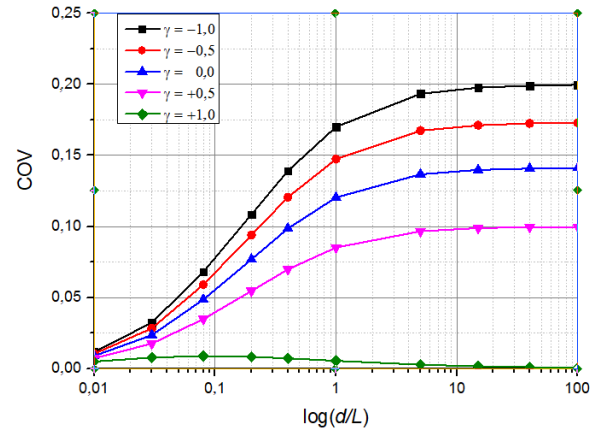
Hình C.10. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,15$)

a. λ_1 b. λ_2

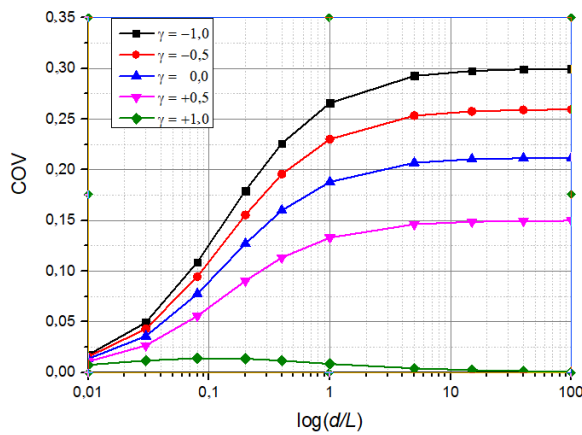
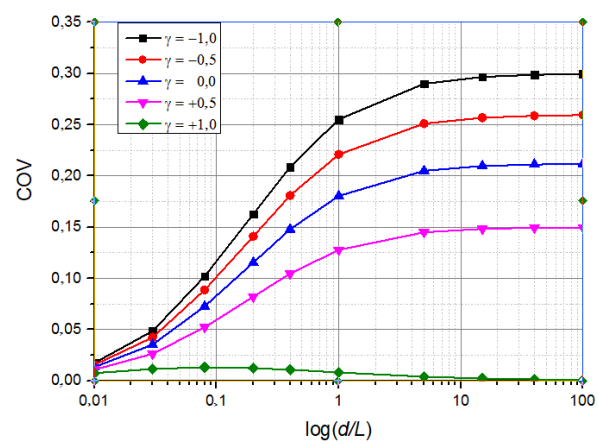
Hình C.11. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên hai chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,20$)

a. λ_1 b. λ_2

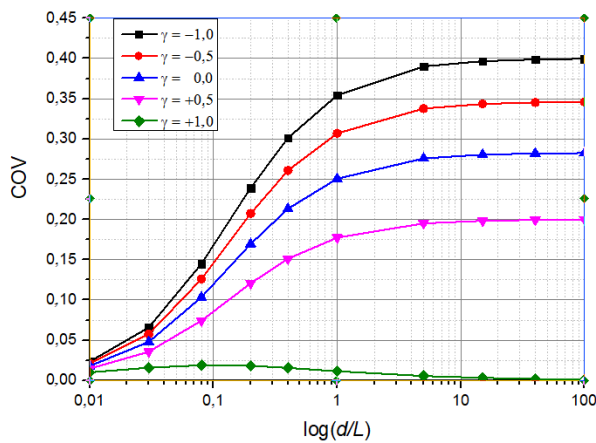
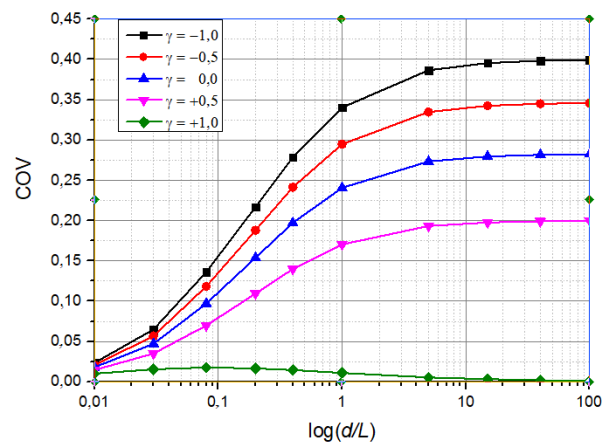
Hình C.12. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,05$)

a. λ_1 b. λ_2

Hình C.13. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,10$)

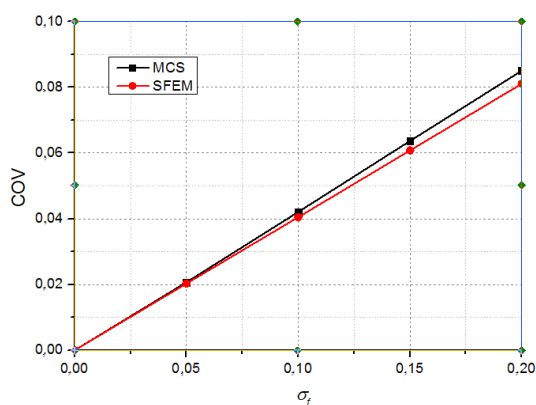
a. λ_1 b. λ_2

Hình C.14. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,15$)

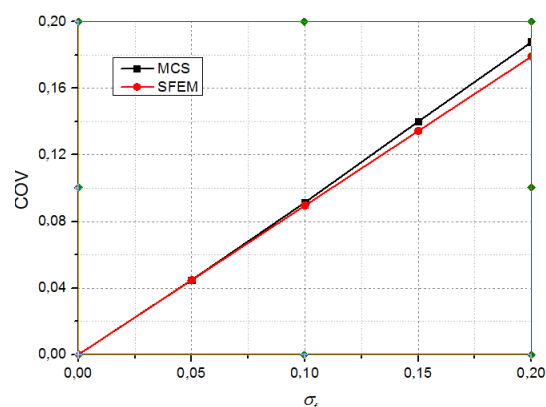
a. λ_1 b. λ_2

Hình C.15. Ảnh hưởng của mối tương quan giữa các trường ngẫu nhiên ba chiều của tính chất vật liệu đến COV của giá trị riêng ($\sigma_f = \sigma_g = 0,20$)

PHỤ LỤC D: SO SÁNH KỲ VỌNG, COV ĐÁP ỨNG CỦA DÀM, CỘT ĐƯỢC XÁC ĐỊNH BẰNG SFEM VÀ MCS

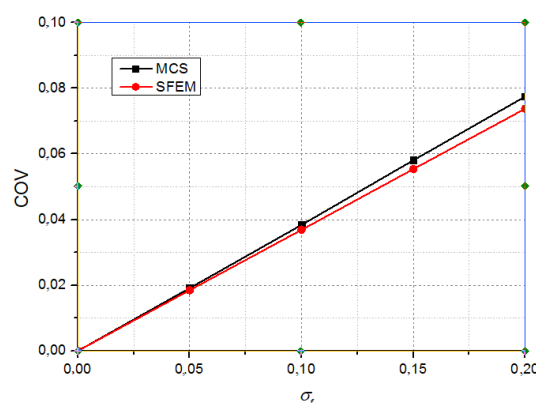


$$a, d_x = d_y = 0,08L$$

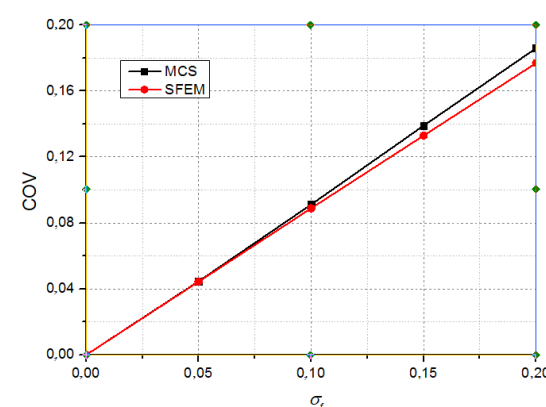


$$b, d_x = d_y = L$$

Hình D.1. So sánh COV chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều

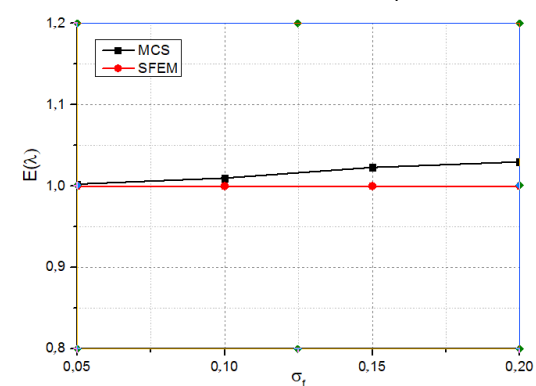


$$a, d_x = d_y = d_z = 0,08L$$

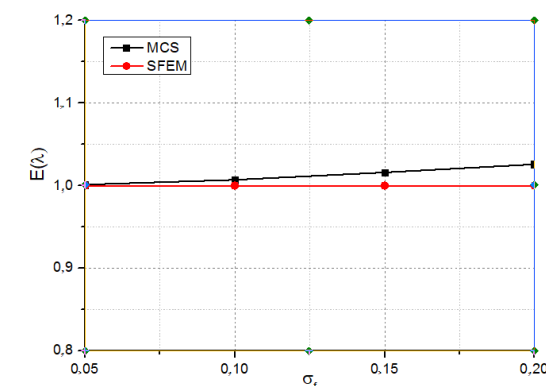


$$b, d_x = d_y = d_z = L$$

Hình D.2. So sánh COV chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều

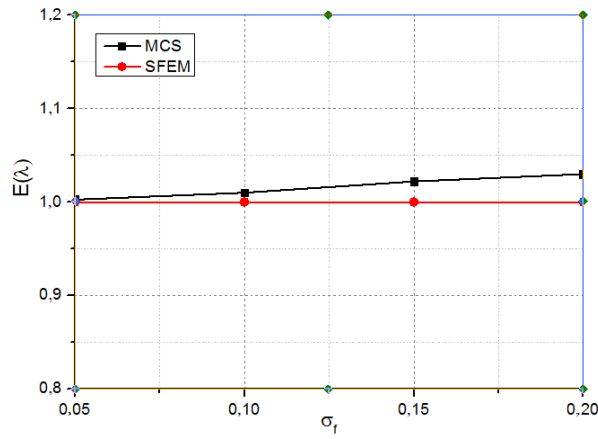
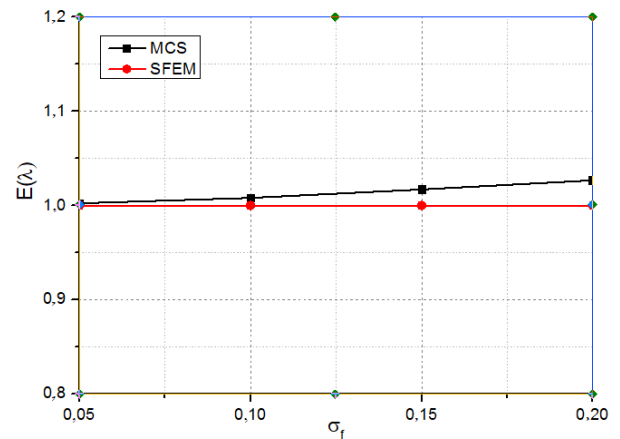


$$a, d_x = d_y = 0,08L$$

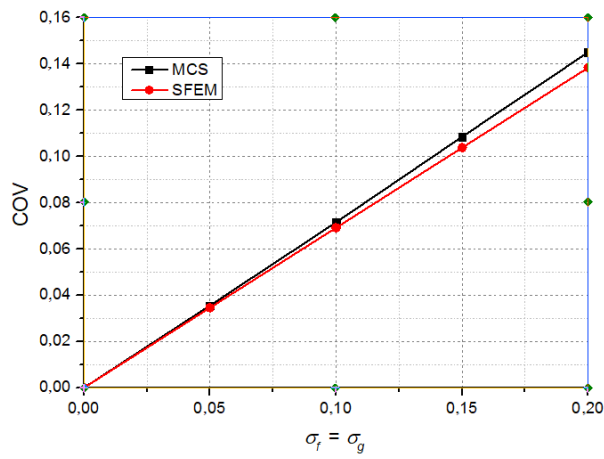
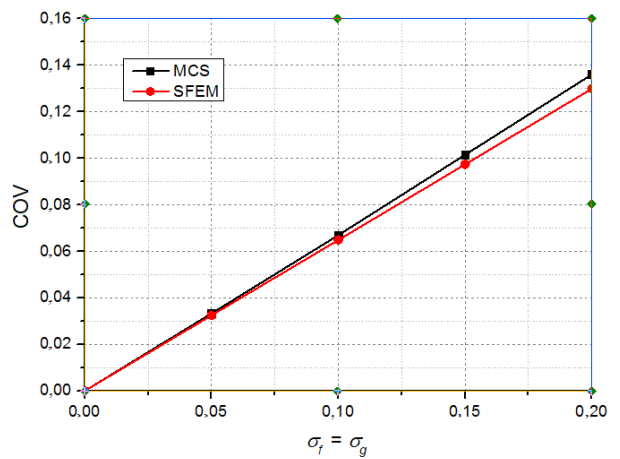
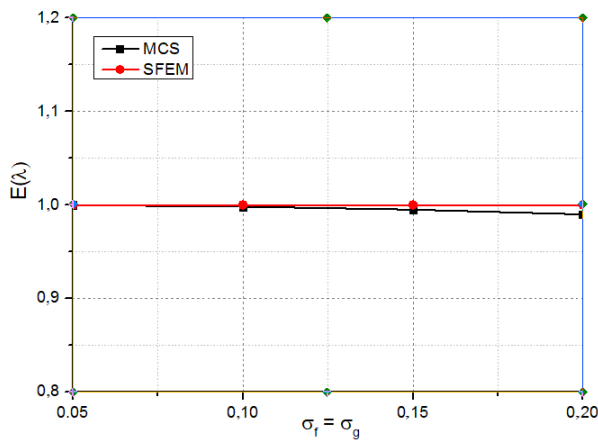
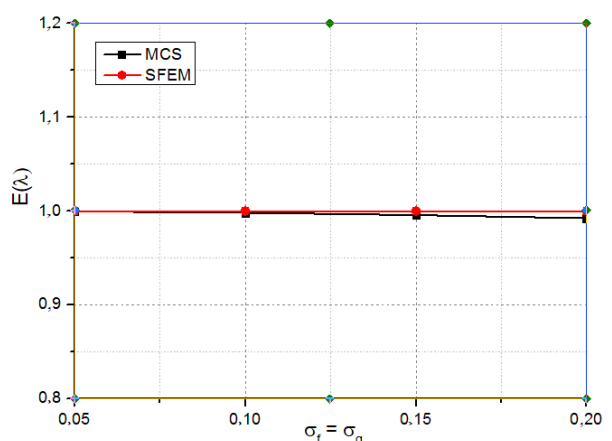


$$b, d_x = d_y = L$$

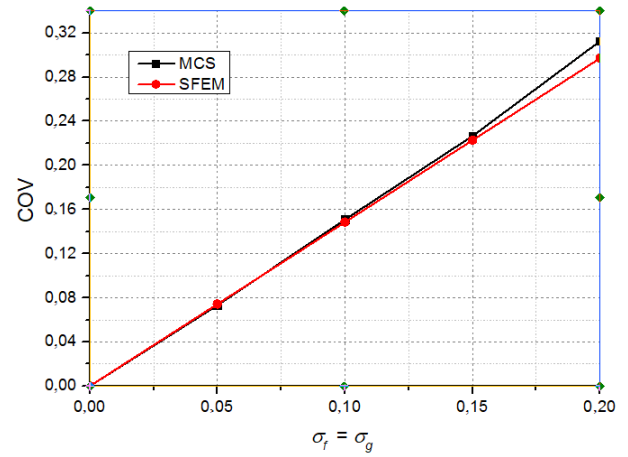
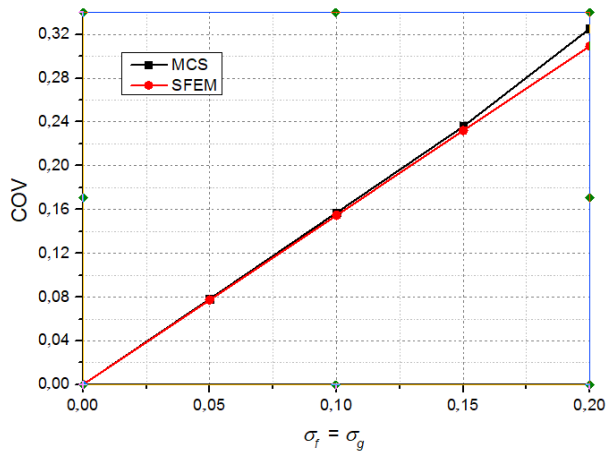
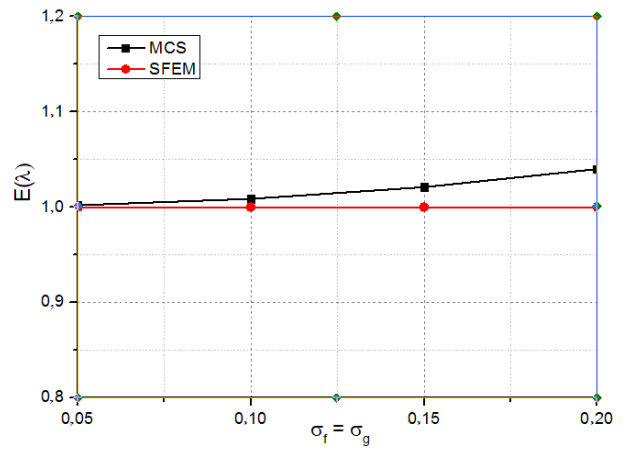
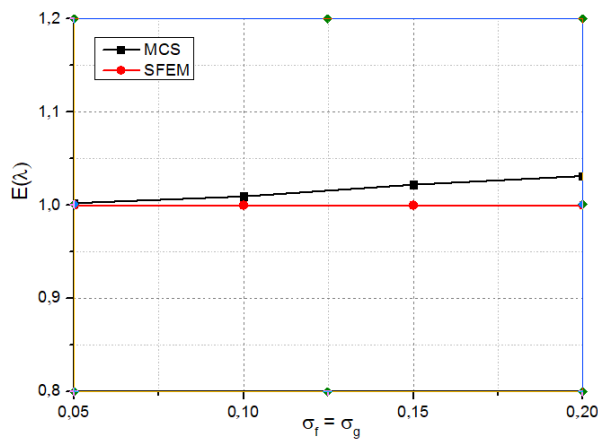
Hình D.3. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều

a, $d_x = d_y = d_z = 0,08L$ b, $d_x = d_y = d_z = L$

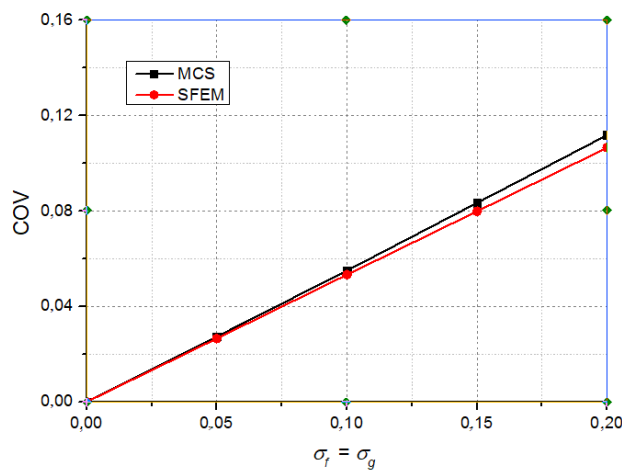
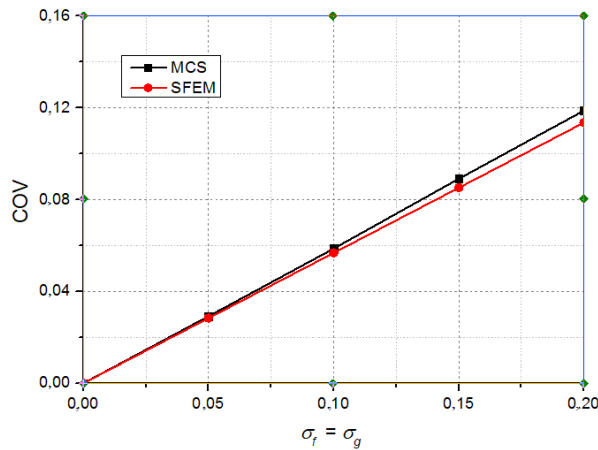
Hình D.4. So sánh kỳ vọng của chuyển vị chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều

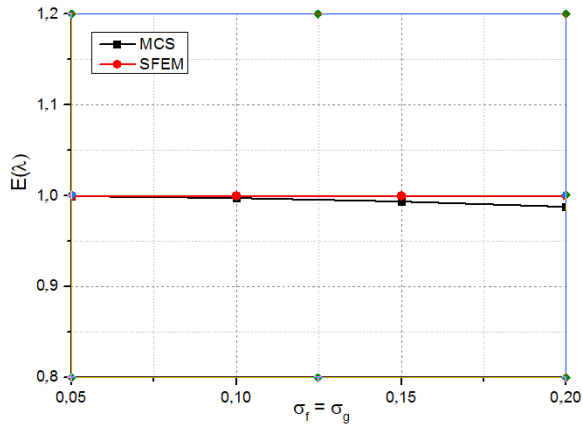
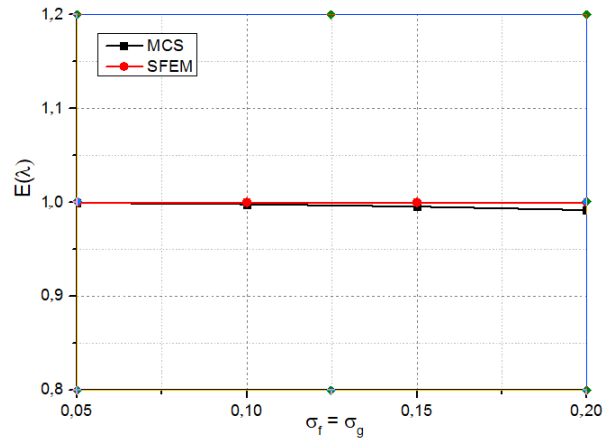
a, COV của λ_1 b, COV của của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của của λ_2

Hình D.5. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$, $\gamma = -0,5$)

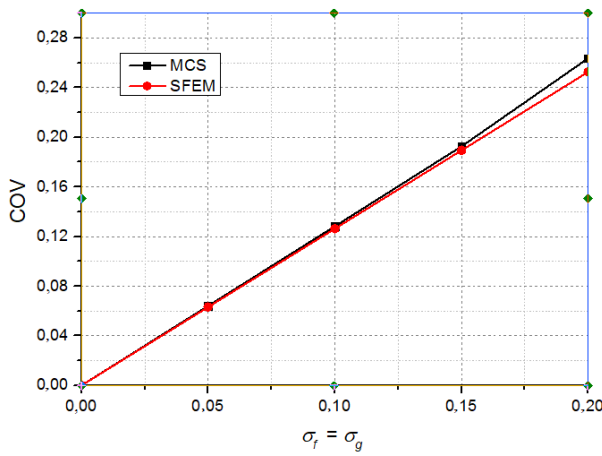
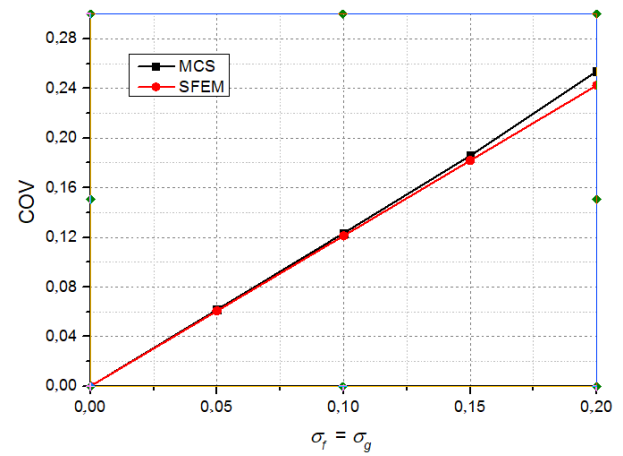
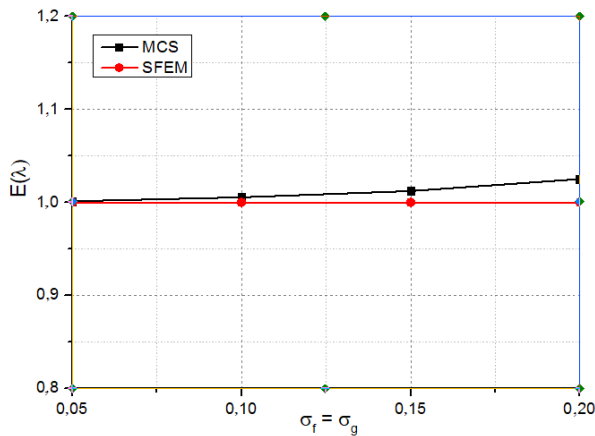
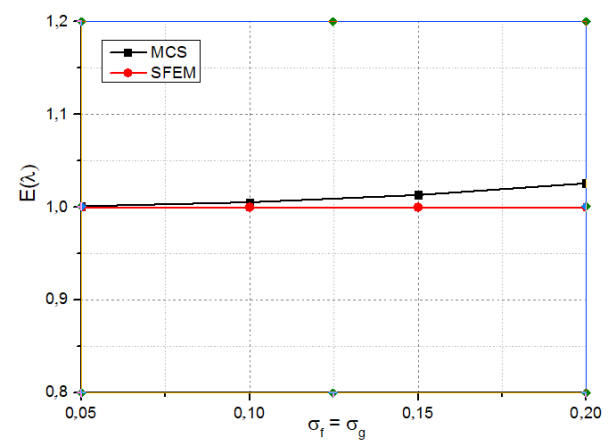
a, COV của λ_1 b, COV của của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của của λ_2

Hình D.6. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_r và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$, $\gamma = -0,5$)

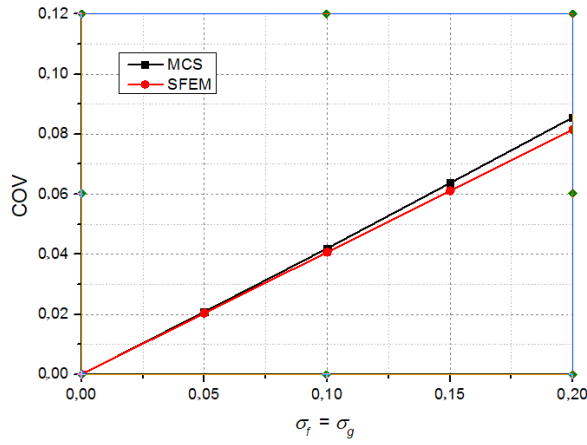
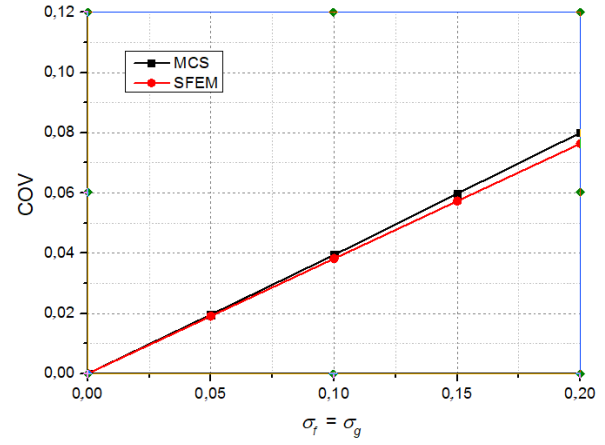
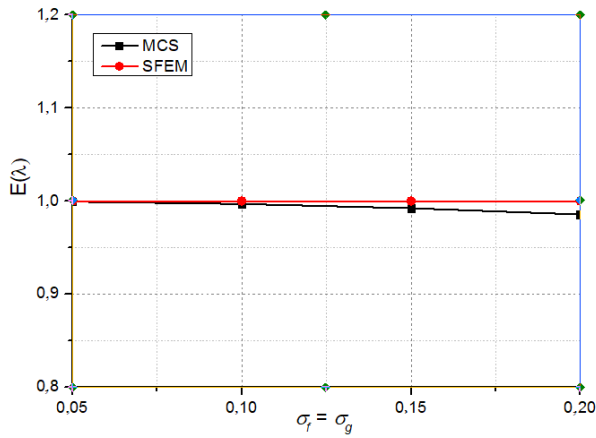
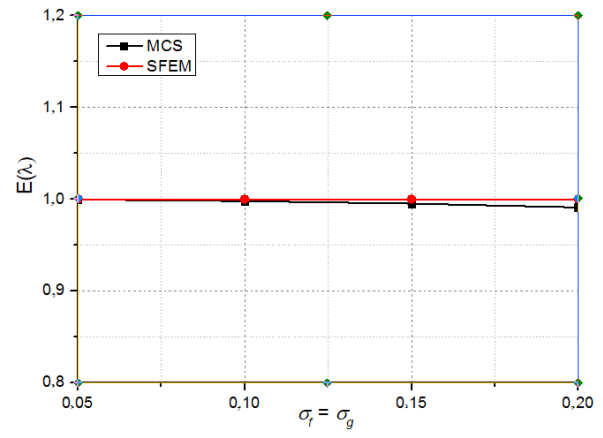
a, COV của λ_1 b, COV của của λ_2

c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của của λ_2

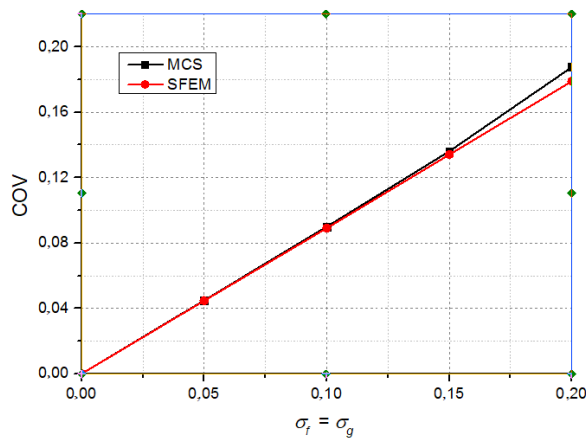
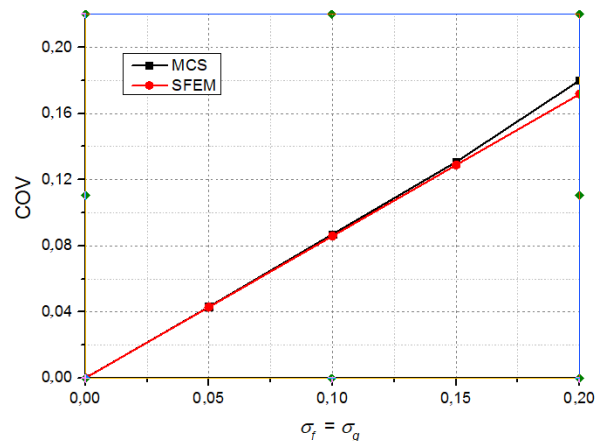
Hình D.7. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$, $\gamma = 0$)

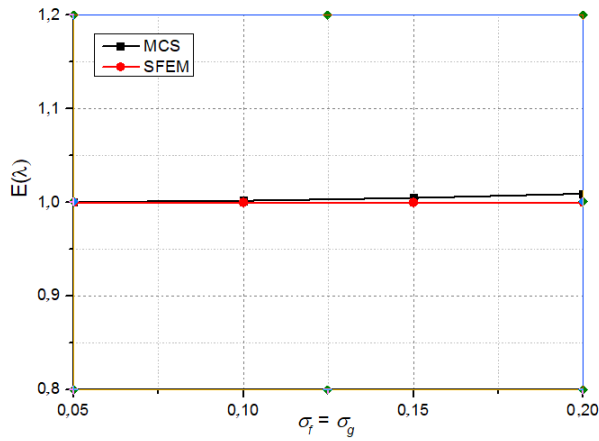
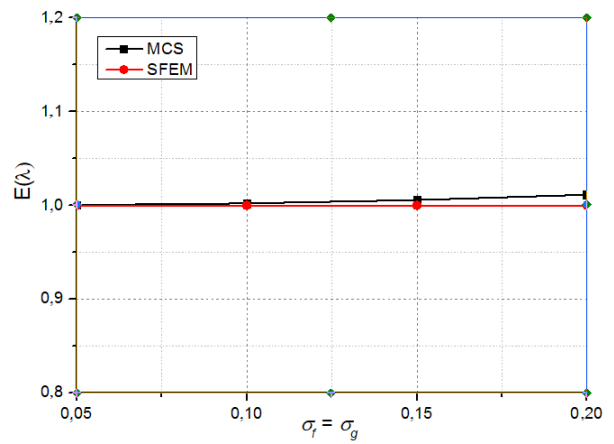
a, COV của của λ_1 b, COV của của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

Hình D.8. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$, $\gamma = 0$)

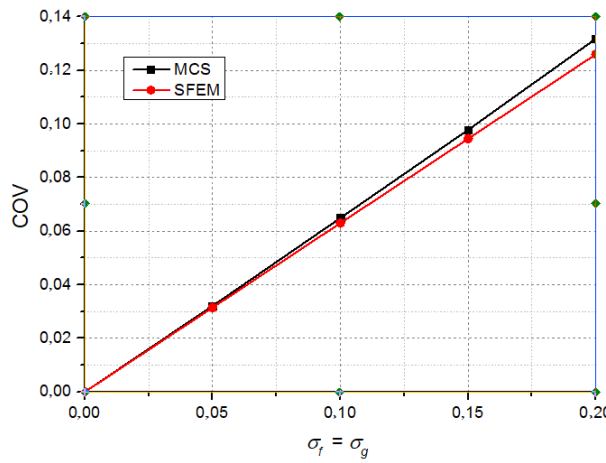
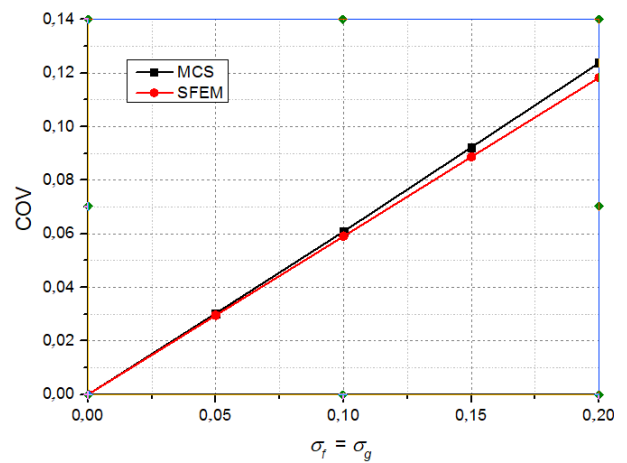
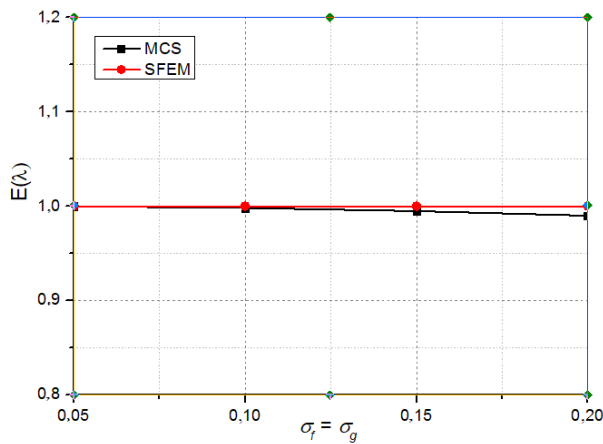
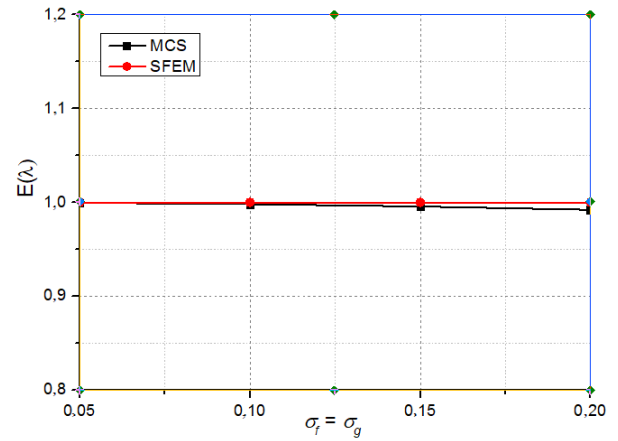
a, COV của λ_1 b, COV của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

Hình D.9. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$, $\gamma = 0,5$)

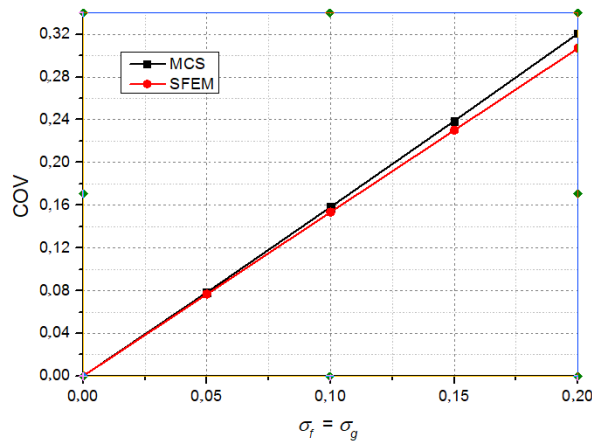
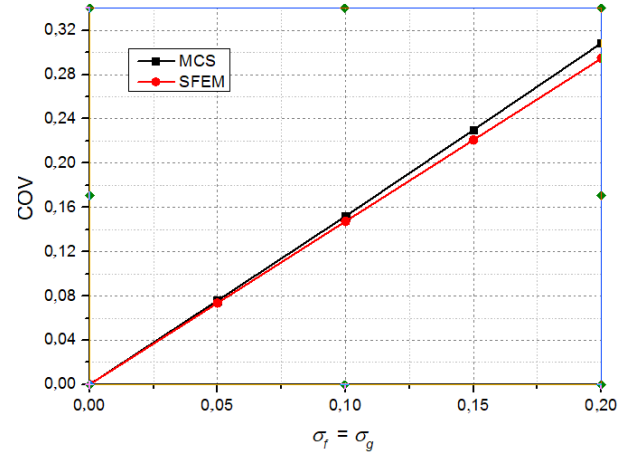
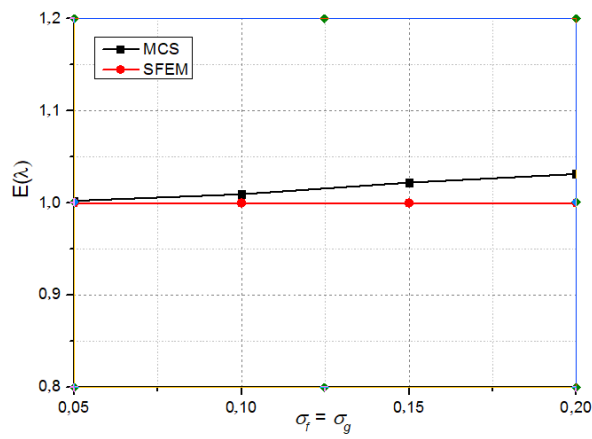
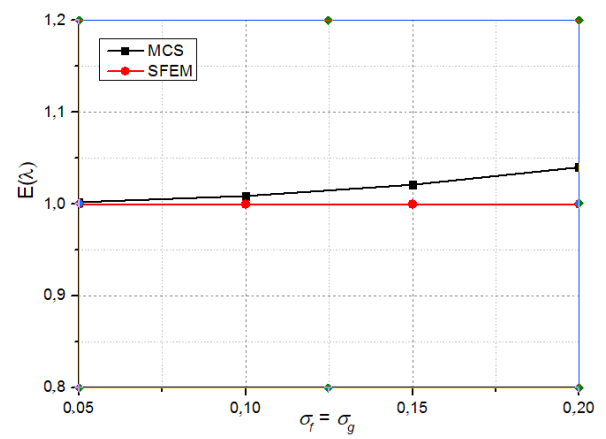
a, COV của λ_1 b, COV của λ_2

c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

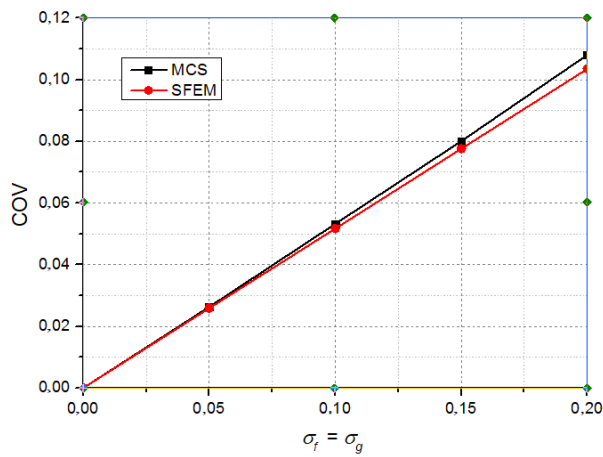
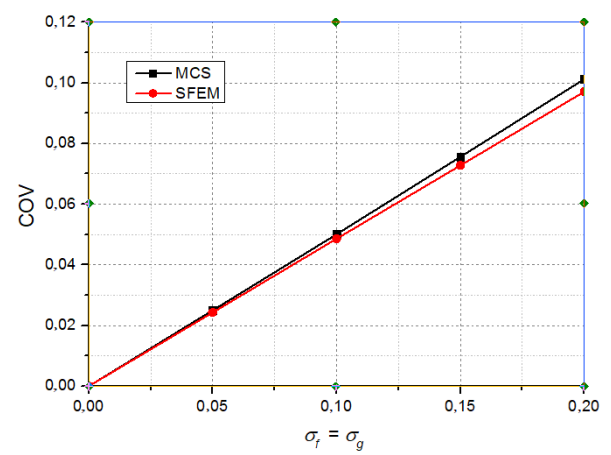
Hình D.10. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$, $\gamma = 0,5$)

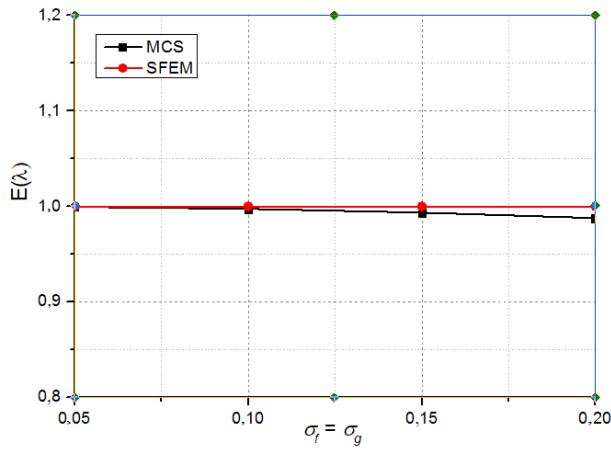
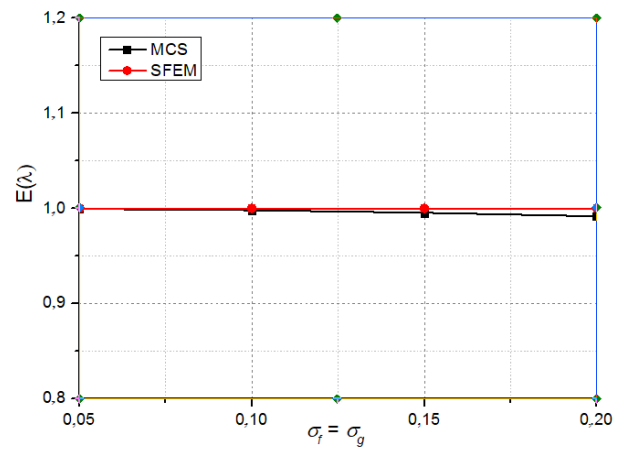
a, COV của λ_1 b, COV của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

Hình D.11. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$, $\gamma = -0,5$)

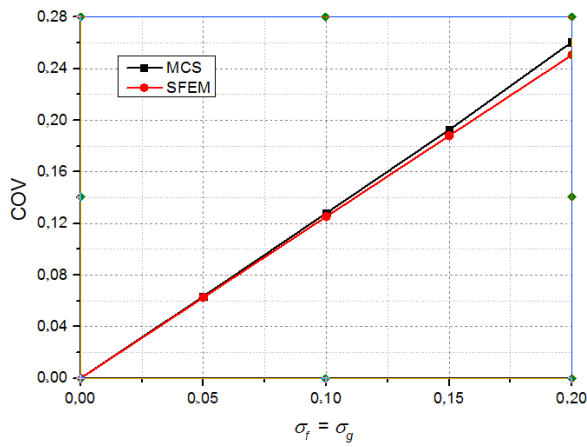
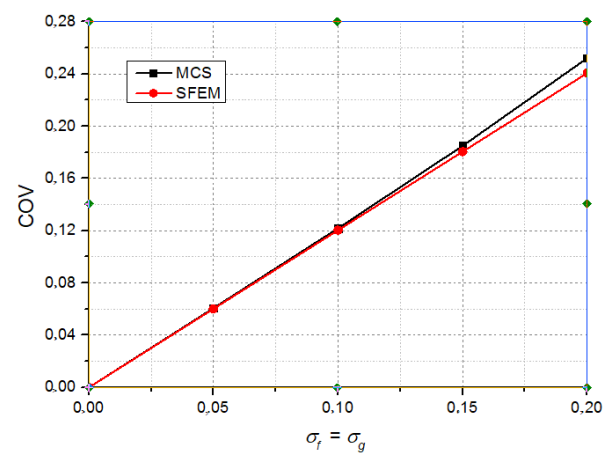
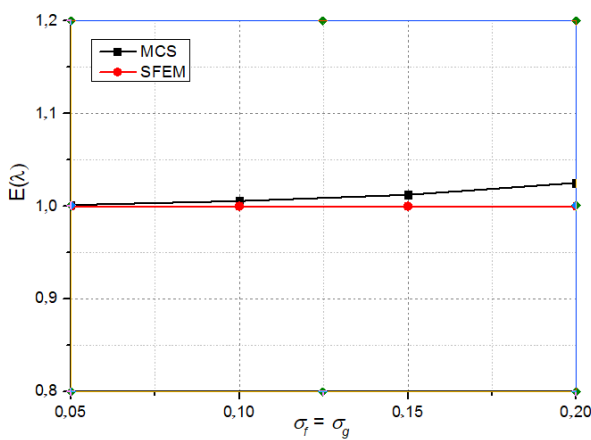
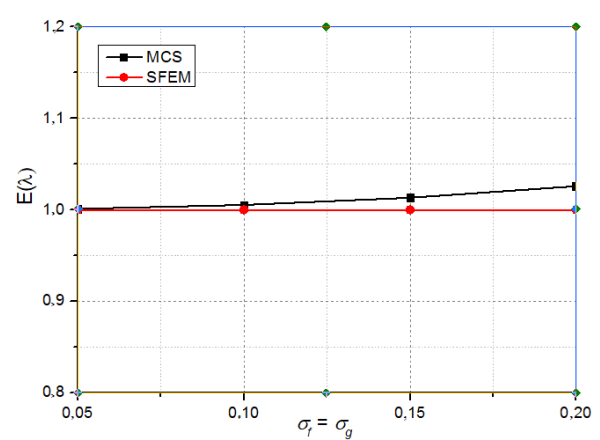
a, COV của λ_1 b, COV của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

Hình D.12. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$, $\gamma = -0,5$)

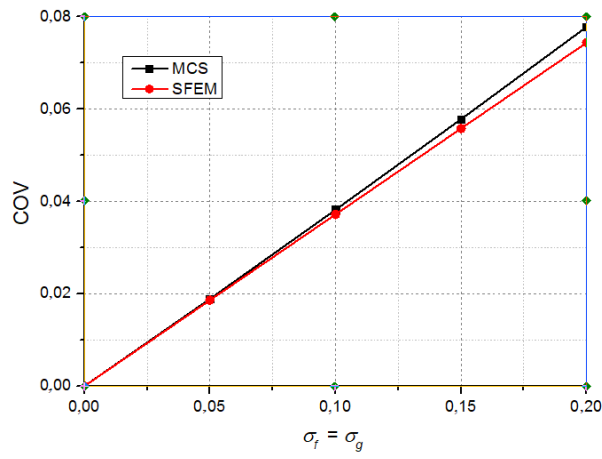
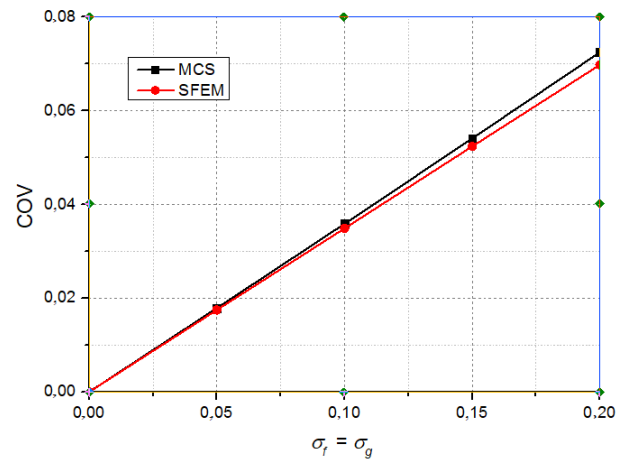
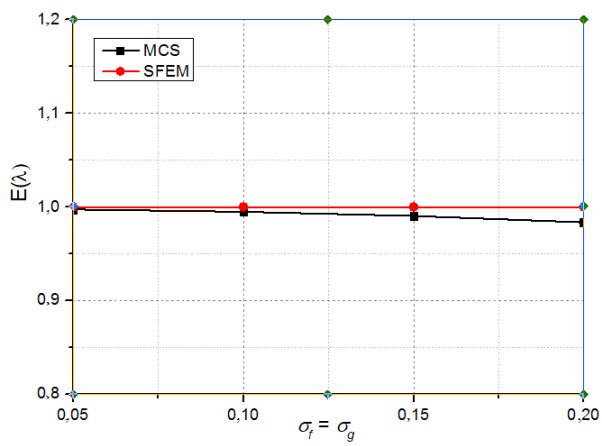
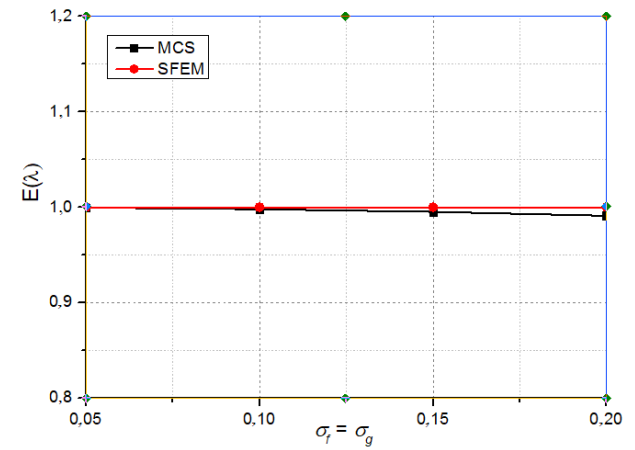
a, COV của λ_1 b, COV của λ_2

c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

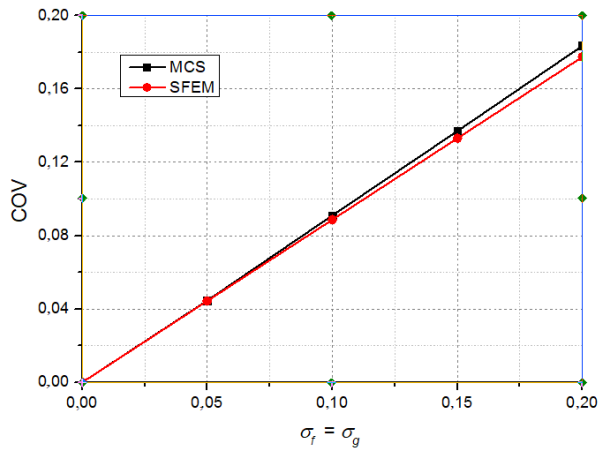
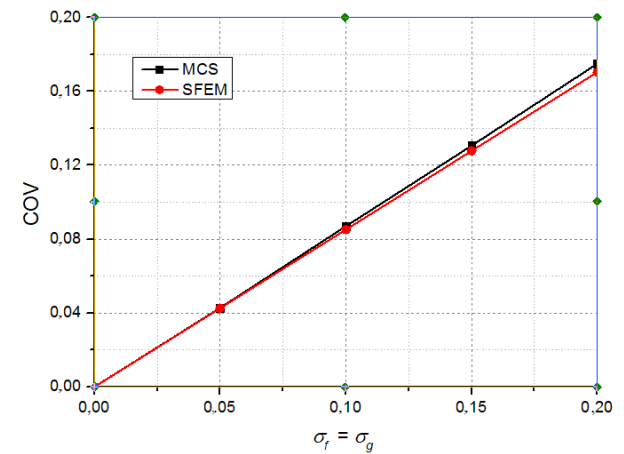
Hình D.13. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$, $\gamma = 0$)

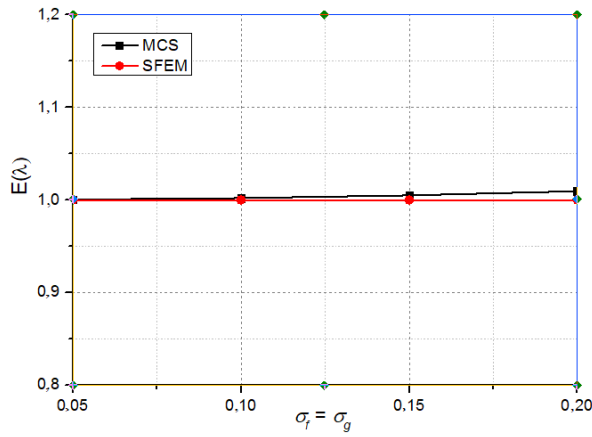
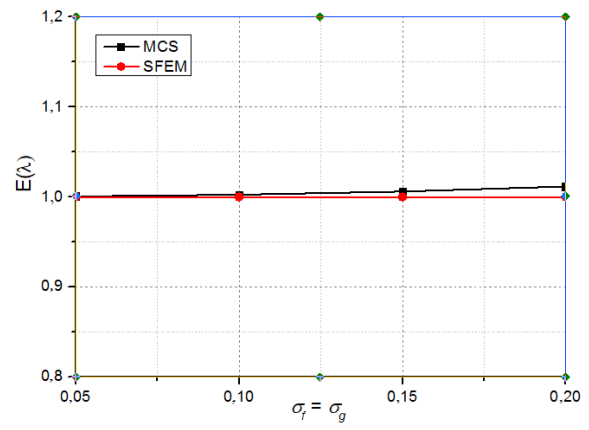
a, COV của λ_1 b, COV của của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của của λ_2

Hình D.14. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$, $\gamma = 0$)

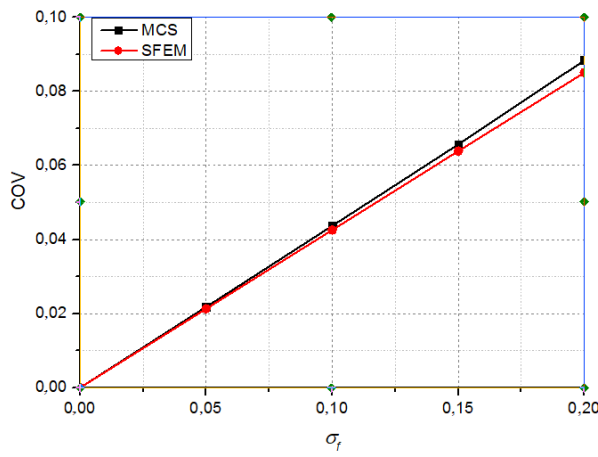
a, COV của λ_1 b, COV của của λ_2 c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

Hình D.15. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$, $\gamma = 0,5$)

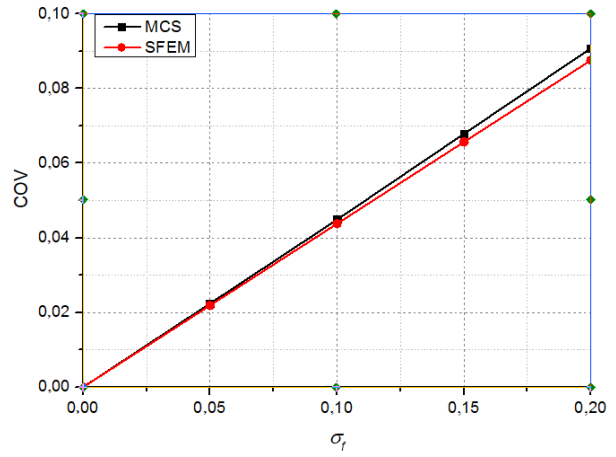
a, COV của λ_1 b, COV của λ_2

c, Kỳ vọng của λ_1 d, Kỳ vọng của λ_2

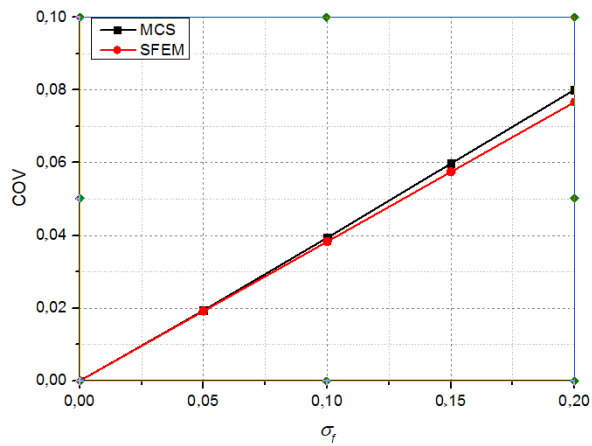
Hình D.16. So sánh COV và kỳ vọng giá trị riêng chuẩn hóa từ SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f và σ_g của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$, $\gamma = 0,5$)



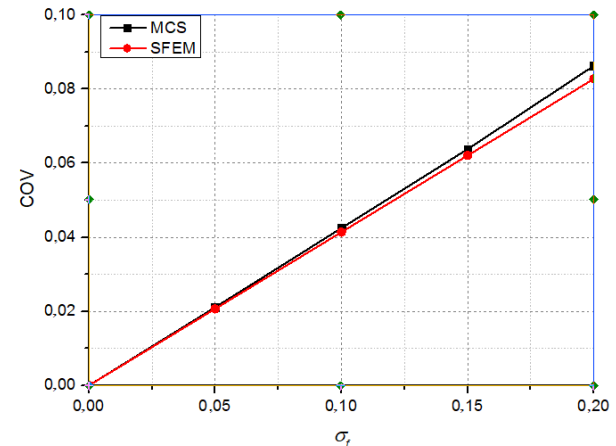
a, C - F



b, H - H

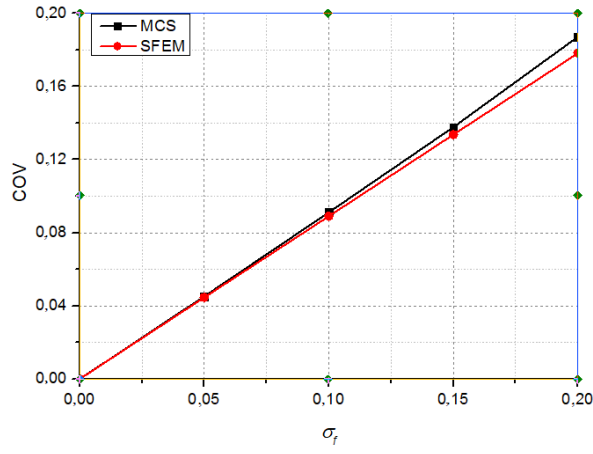


c, C - C

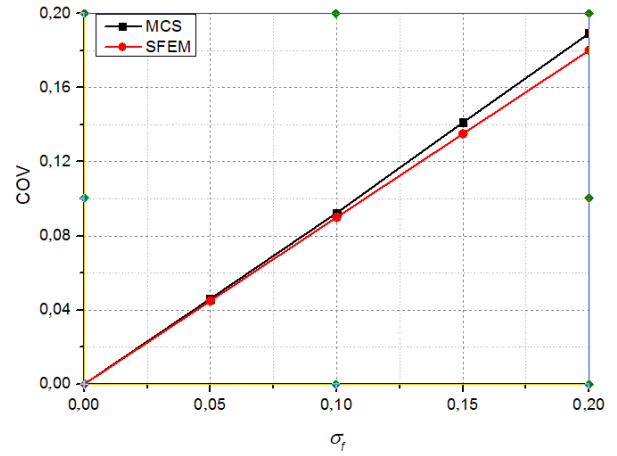


d, C - H

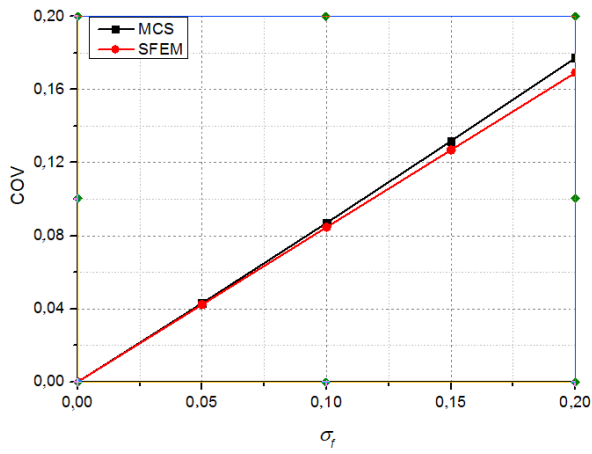
Hình D.17. So sánh COV lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$)



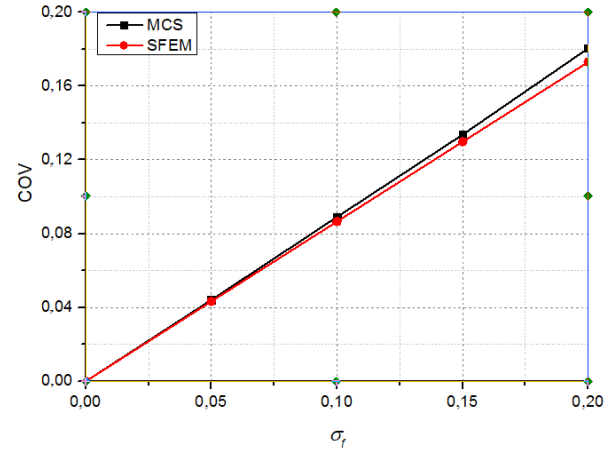
a, C - F



b, H - H

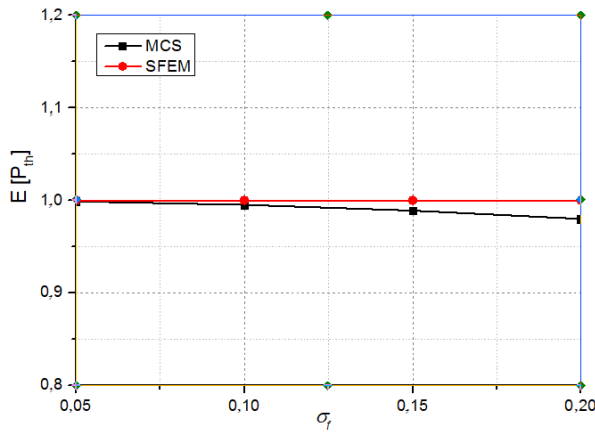


c, C - C

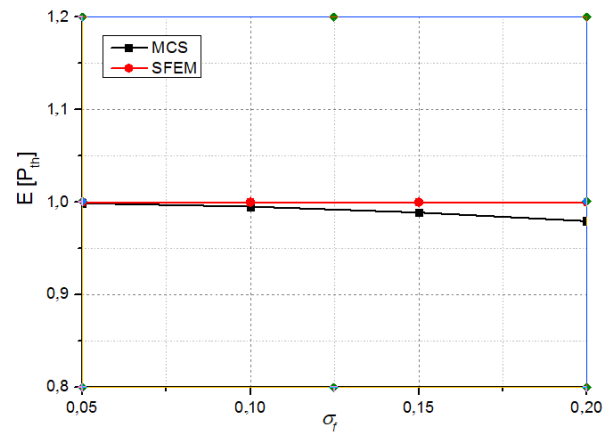


d, C - H

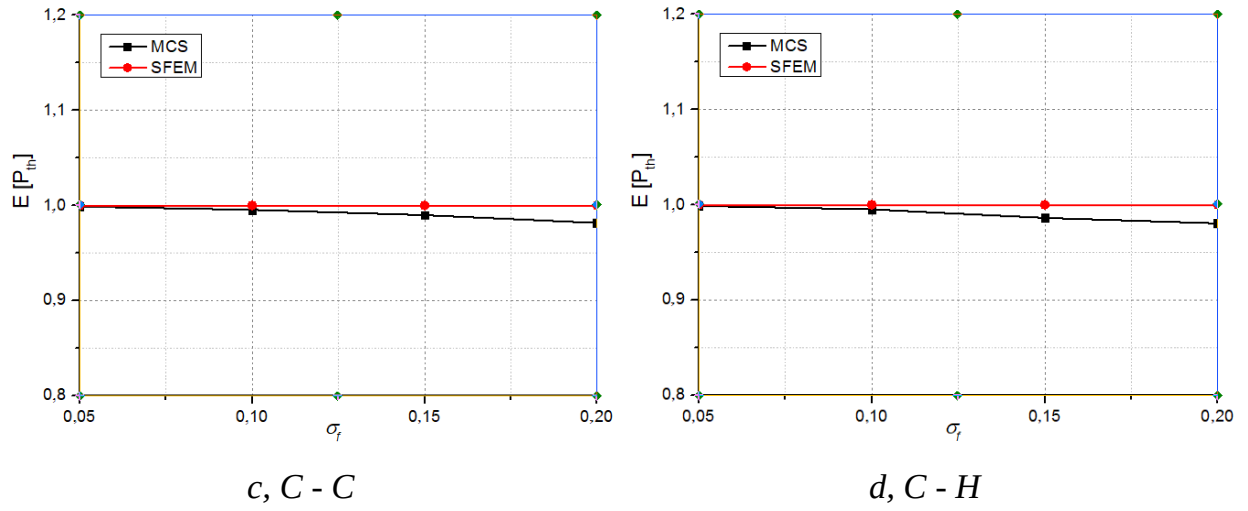
Hình D.18. So sánh COV lực tối hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$)



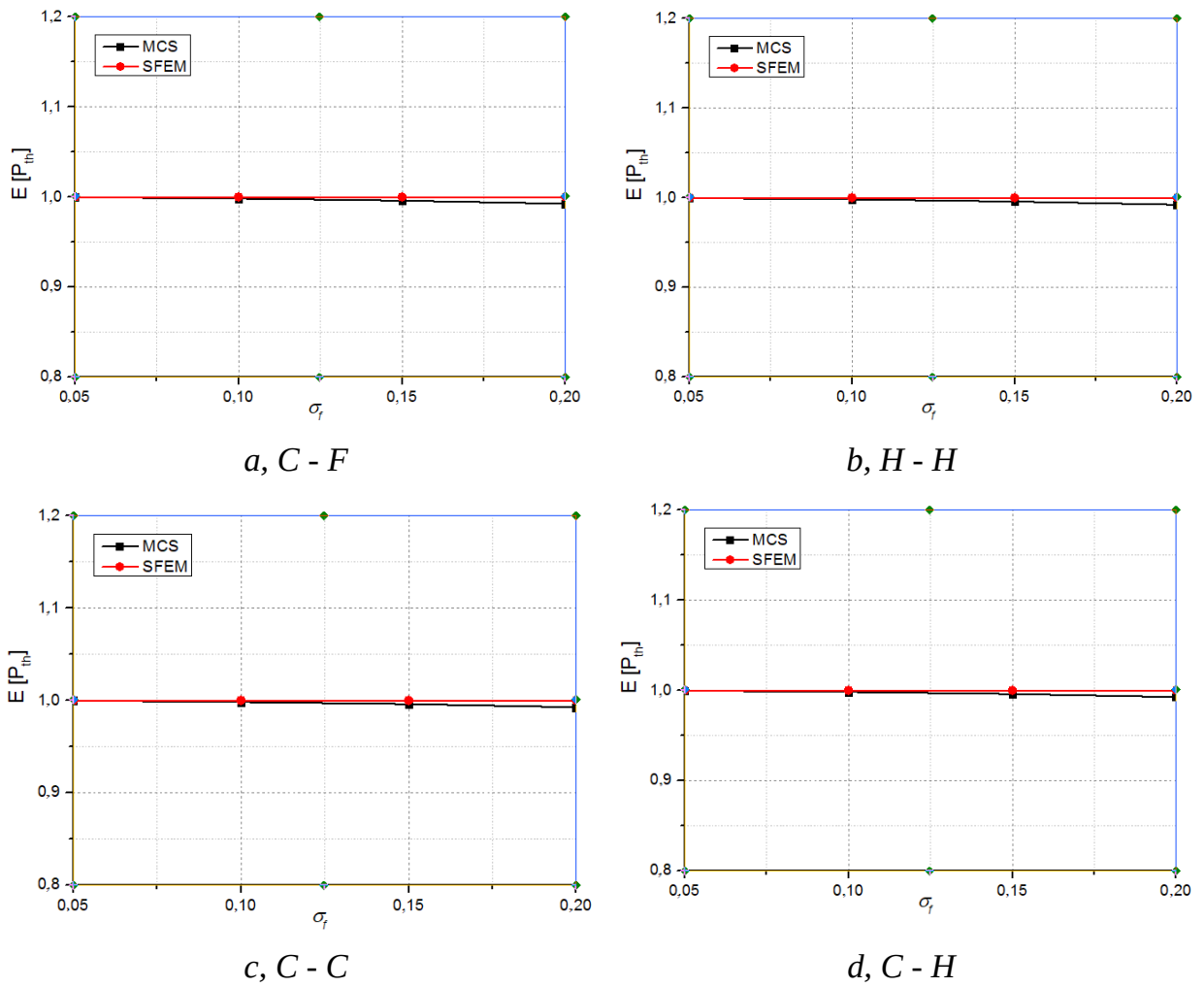
a, C - F



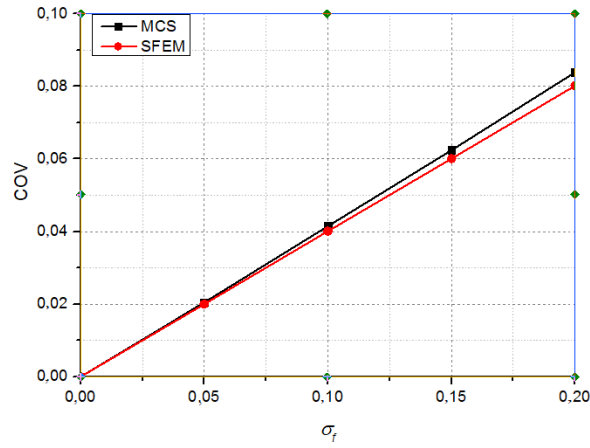
b, H - H



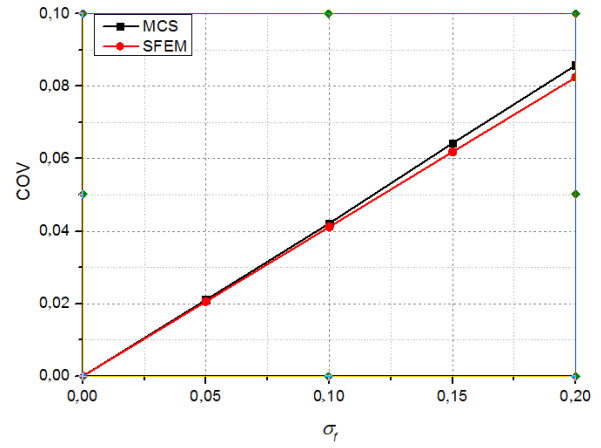
Hình D.19. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = 0,08L$)



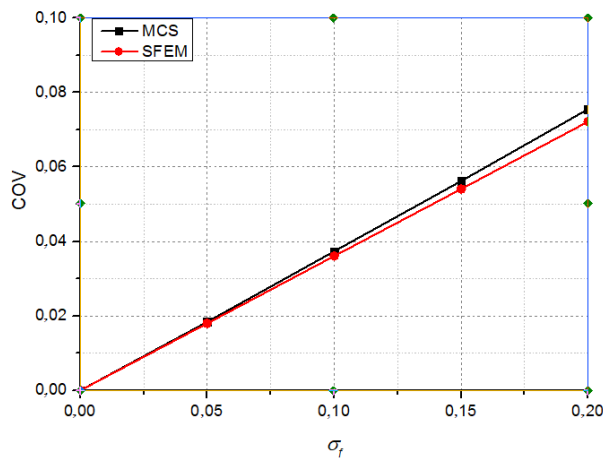
Hình D.20. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên hai chiều ($d_x = d_y = L$)



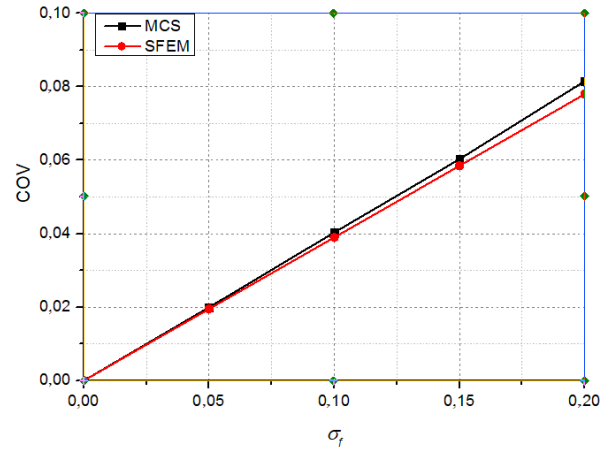
a, C - F



b, H - H

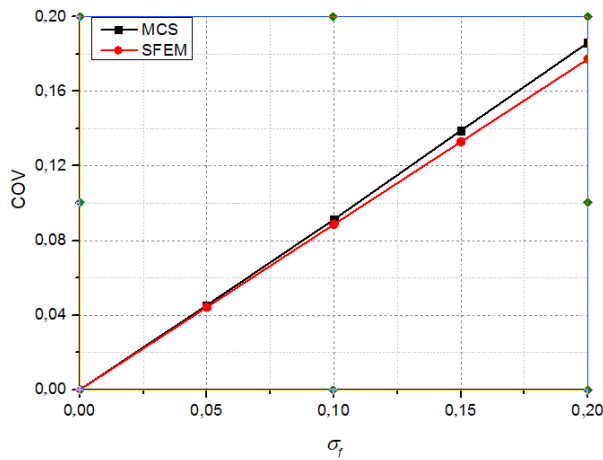


c, C - C

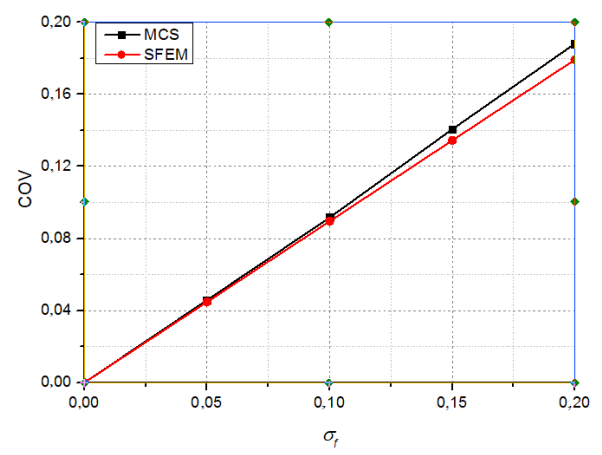


d, C - H

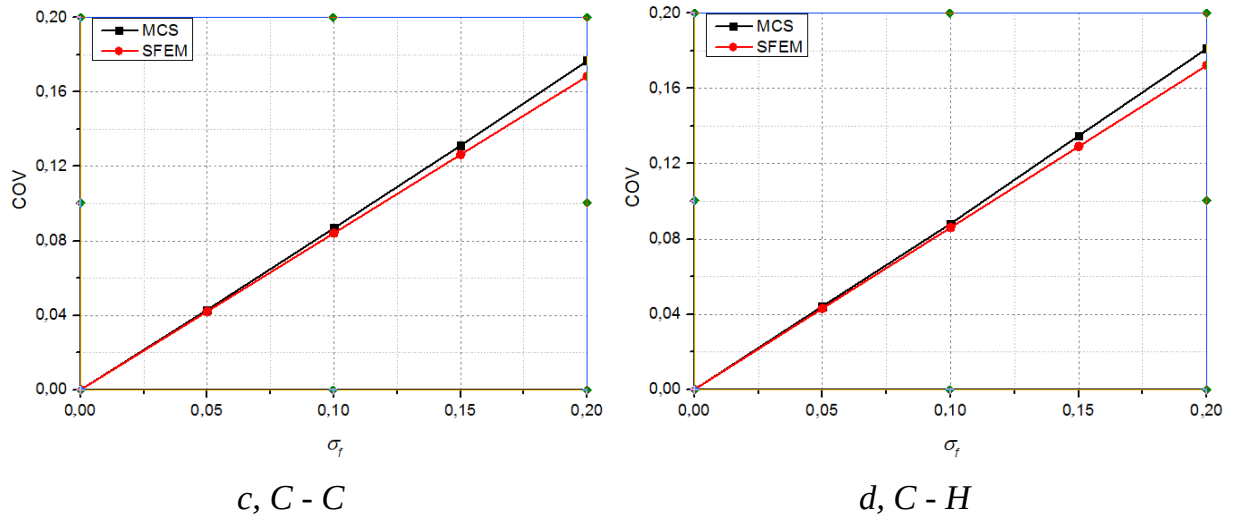
Hình D.21. So sánh COV lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$)



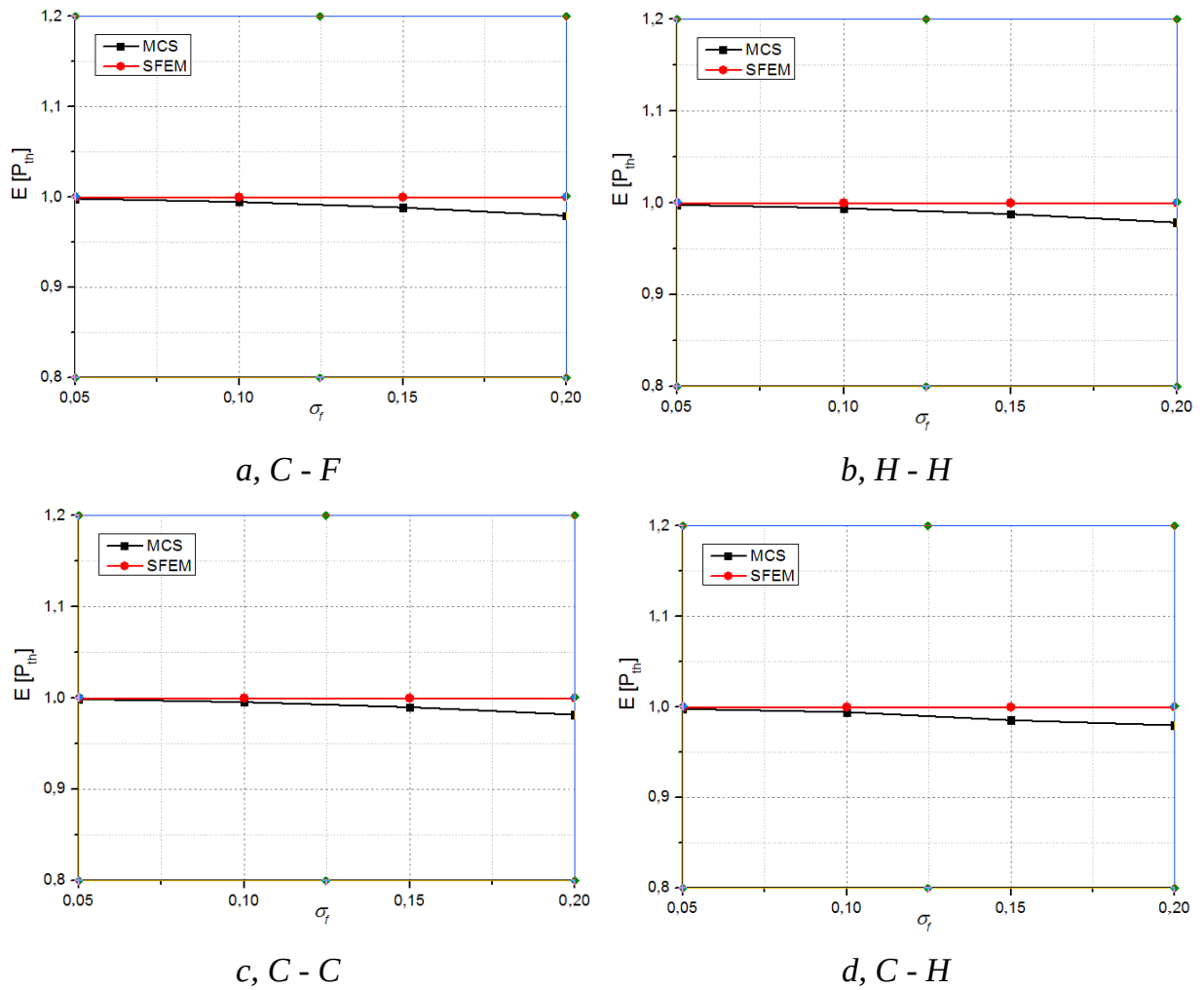
a, C - F



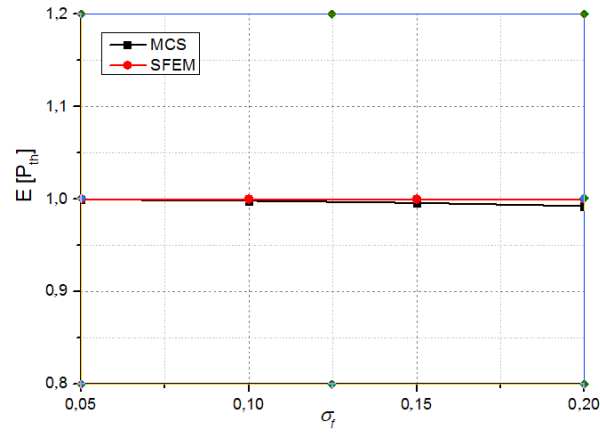
b, H - H



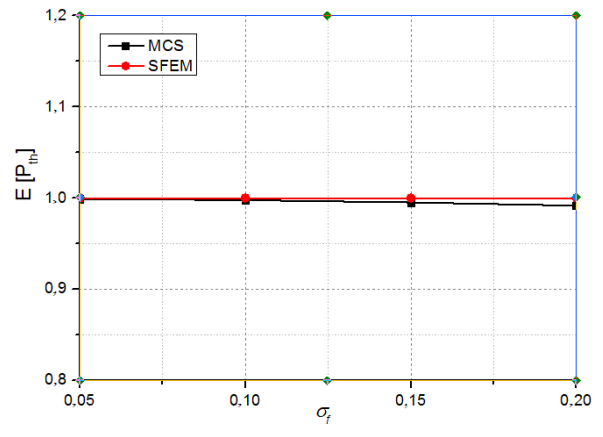
Hình D.22. So sánh COV lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$)



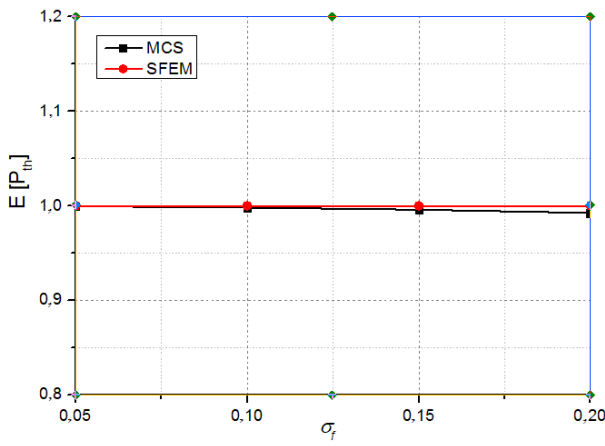
Hình D.23. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = 0,08L$)



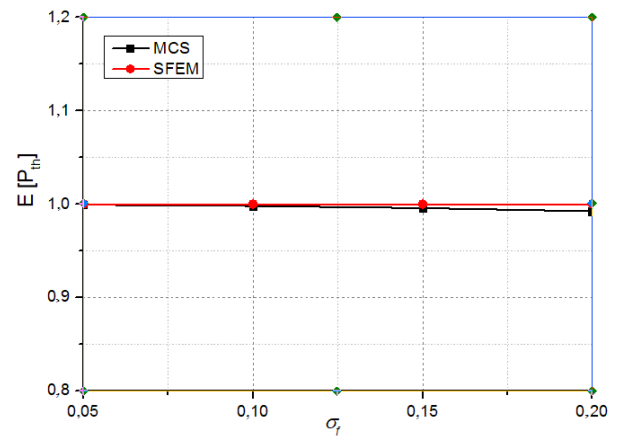
a, C - F



b, H - H



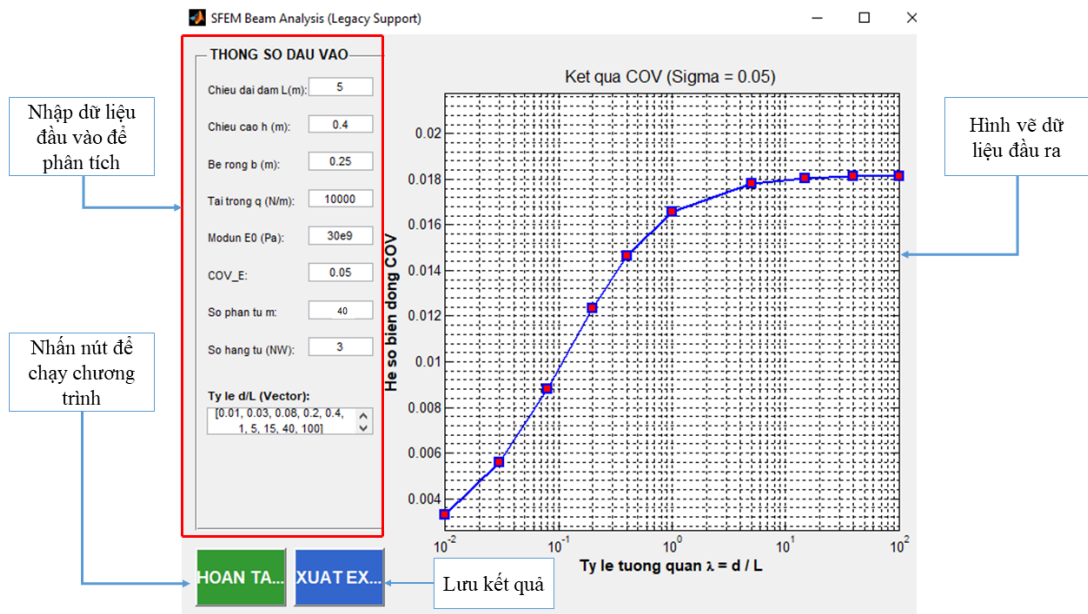
c, C - C



d, C - H

Hình D.24. So sánh kỳ vọng của lực tới hạn chuẩn hóa xác định bằng SFEM và MCS phụ thuộc vào σ_f của trường ngẫu nhiên ba chiều ($d_x = d_y = d_z = L$)

PHỤ LỤC E: CHƯƠNG TRÌNH TÍNH



Hình E.1. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán tĩnh

A.1. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình được thiết kế với giao diện trực quan, tương thích với phần mềm MATLAB (từ phiên bản R2012b trở lên). Các bước thực hiện như sau:

1. **Khởi động:** Mở phần mềm MATLAB. Tạo một tệp kịch bản (script) mới, dán toàn bộ mã nguồn ở mục A.4 vào và lưu lại với tên SFEM_GUI_TINH.m.
2. **Mở giao diện:** Trong cửa sổ Command Window của MATLAB, gõ lệnh SFEM_GUI_TINH và nhấn Enter. Cửa sổ giao diện chính sẽ hiện ra.
3. **Nhập liệu:** Tại khung "THÔNG SỐ ĐẦU VÀO" bên trái giao diện, người dùng tiến hành nhập các thông số hình học, vật liệu và thông số thống kê của bài toán.
4. **Thực thi tính toán:** Bấm nút "CHẠY TÍNH TOÁN".
5. **Quan sát kết quả:** Sau khi tính toán hoàn tất, đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa chiều dài tương quan và hệ số biến thiên (COV) của chuyển vị sẽ được vẽ trực tiếp trên khung đồ thị bên phải.
6. **Lưu trữ dữ liệu:** Bấm nút "XUẤT EXCEL" để lưu toàn bộ số liệu dạng bảng tính ra ổ cứng phục vụ cho việc vẽ biểu đồ chuyên nghiệp và báo cáo.

A.2. Tệp dữ liệu đầu vào (Input Data)

Do chương trình sử dụng giao diện GUI, dữ liệu đầu vào được nhập trực tiếp thông qua các ô văn bản (Text box) thay vì đọc từ tệp văn bản (.txt). Các trường dữ liệu đầu vào bao gồm:

- **Chiều dài dầm L (m):** Nhịp dầm tính toán (Dạng số vô hướng, ví dụ: 5).
- **Chiều cao h (m):** Kích thước chiều cao mặt cắt (Ví dụ: 0.4).
- **Bề rộng b (m):** Kích thước bề rộng mặt cắt (Ví dụ: 0.25).

- **Tai trọng q (N/m):** Giá trị tải trọng phân bố đều (Ví dụ: 10000).
- **Modun E0 (Pa):** Giá trị kỳ vọng của Mô đun đàn hồi danh nghĩa (Ví dụ: 30e9).
- **COV_E:** Hệ số biến thiên sơ cấp của Mô đun đàn hồi (Ví dụ: 0.05).
- **So phan tu m:** Số lượng phần tử chia lưới FEM dọc trục dầm (Ví dụ: 40).
- **So hang tu (NW):** Số biến ngẫu nhiên trong khai triển tích phân trọng số (Mặc định: 3).
- **Ty le d/L (Vector):** Mảng chứa các tỷ số chiều dài tương quan cần khảo sát. Nhập dưới dạng vector trong ngoặc vuông (Ví dụ: [0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 20, 100]).

A.3. Tập dữ liệu đầu ra (Output Data)

Chương trình xuất dữ liệu đầu ra dưới dạng tệp bảng tính Microsoft Excel (.xlsx), bao gồm 2 trang tính (sheets) để đảm bảo lưu vết đầy đủ tính toán:

- **Sheet 1 ("KetQua"):** Chứa ma trận kết quả tính toán chính.
 - *Cột A (TyLe_TuongQuan_d_L):* Các mức tỷ lệ chiều dài tương quan khảo sát tương ứng với dữ liệu đầu vào.
 - *Cột B (COV_ChuyenVi):* Hệ số biến thiên (COV) của chuyển vị uốn tại nút tính toán tương ứng với từng chiều dài tương quan.
- **Sheet 2 ("ThongSoDauVao"):** Lưu trữ lại toàn bộ các thông số thiết lập đầu vào để đảm bảo tính minh bạch và có thể truy xuất, kiểm tra lại điều kiện mô phỏng (bao gồm: Chiều dài nhịp, Kích thước tiết diện, Tải trọng, COV vật liệu, Số lưới phần tử).

A.4. Bản in câu lệnh chương trình (Source Code)

```
function SFEM_GUI_TINH
clc; close all;
% --- 1. KHOI TAO CUA SO CHINH ---
hFig = figure('Name', 'SFEM Beam Analysis (Legacy Support)', ...
    'NumberTitle', 'off', ...
    'Position', [100, 100, 1000, 600], ...
    'Color', [0.94 0.94 0.94], ...
    'MenuBar', 'none', ...
    'Resize', 'on');
% --- 2. KHUNG NHAP LIEU (PANEL INPUT) ---
hPanelInput = uipanel('Parent', hFig, ...
    'Title', 'THONG SO DAU VAO', ...
    'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
    'Position', [0.02, 0.15, 0.25, 0.83]);
% Cac gia tri scalar
add_scalar_input(hPanelInput, 'Chieu dai dam L(m):', '5', 0.92, 'in_L1');
add_scalar_input(hPanelInput, 'Chieu cao h (m):', '0.4', 0.84, 'in_h');
add_scalar_input(hPanelInput, 'Be rong b (m):', '0.25', 0.76, 'in_b');
add_scalar_input(hPanelInput, 'Tai trong q (N/m):', '10000', 0.68, 'in_q');
add_scalar_input(hPanelInput, 'Modun E0 (Pa):', '30e9', 0.60, 'in_E0');
add_scalar_input(hPanelInput, 'COV_E:', '0.05', 0.52, 'in_sigma');
add_scalar_input(hPanelInput, 'So phan tu m:', '20', 0.44, 'in_m');
add_scalar_input(hPanelInput, 'So hang tu (NW):', '3', 0.36, 'in_nw');
% O nhap Vector Ty le
uicontrol('Parent', hPanelInput, 'Style', 'text', ...
```

```

    'String', 'Ty le d/L (Vector):', ...
    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontWeight', 'bold', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05, 0.26, 0.9, 0.04], ...
    'BackgroundColor', [0.94 0.94 0.94]);
uicontrol('Parent', hPanelInput, 'Style', 'edit', ...
    'String', [0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 20, 100], ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05, 0.20, 0.9, 0.06], ...
    'Tag', 'in_ratio', 'BackgroundColor', 'white', 'Max', 2);
% --- 3. NUT BAM (CHAY TINH TOAN) ---
hBtnRun = uicontrol('Parent', hFig, 'Style', 'pushbutton', ...
    'String', 'CHAY TINH TOAN', ...
    'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold', ...
    'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.02, 0.02, 0.12, 0.10], ...
    'BackgroundColor', [0.2 0.6 0.2], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Callback', @run_analysis_callback);
% --- 3b. NUT BAM (XUAT EXCEL) ---
hBtnExcel = uicontrol('Parent', hFig, 'Style', 'pushbutton', ...
    'String', 'XUAT EXCEL', ...
    'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold', ...
    'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.15, 0.02, 0.12, 0.10], ...
    'BackgroundColor', [0.2 0.4 0.8], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Enable', 'off', ...
    'Callback', @export_excel_callback);
% --- 4. KHUNG DO THI ---
hAx = axes('Parent', hFig, ...
    'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.35, 0.15, 0.60, 0.75], ...
    'FontSize', 10, 'Box', 'on');
grid(hAx, 'on');
xlabel(hAx, 'Ty so do dai tuong quan \lambda = d / L_1');
ylabel(hAx, 'He so bien dong (COV) cua chuyen vi');
title(hAx, 'Ket qua phan tich');
% --- HAM HO TRO ---
function add_scalar_input(parent, lbl, val, y_pos, tag)
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'text', 'String', lbl, ...
        'HorizontalAlignment', 'left', 'Units', 'normalized', ...
        'Position', [0.05, y_pos, 0.55, 0.04], ...
        'BackgroundColor', [0.94 0.94 0.94]);
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'edit', 'String', val, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.60, y_pos+0.01, 0.35, 0.04], ...
        'Tag', tag, 'BackgroundColor', 'white');
end
% --- 5. HAM XU LY CHINH ---
function run_analysis_callback(hObject, ~)
    set(hFig, 'Pointer', 'watch');
    set(hObject, 'String', 'Dang tinh...', 'Enable', 'off');
    set(hBtnExcel, 'Enable', 'off');
    drawnow;
    try

```

```

% 1. Lay du lieu scalar
L1 = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_L1'), 'String'));
h_val = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_h'), 'String'));
b_val = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_b'), 'String'));
q = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_q'), 'String'));
E0 = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_E0'), 'String'));
sigma = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_sigma'), 'String'));
m = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_m'), 'String'));
NW = str2double(get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_nw'), 'String'));
% 2. Lay vector ty le
ratio_str = get(findobj(hFig, 'Tag', 'in_ratio'), 'String');
ratio_vec = str2num(ratio_str);
if isempty(ratio_vec), error('Vui long nhap vector ty le hop le!'); end
% 3. Tinh toan
I = 1/12*b_val*h_val^3;
L = L1/m;
m2 = 2*(m+1);
corr_lengths = ratio_vec * L1;
% --- Lap ghep K0 ---
K00 = zeros(m2,m2);
ke = E0*I * [ 12/L^3, 6/L^2, -12/L^3, 6/L^2;
             6/L^2, 4/L, -6/L^2, 2/L;
            -12/L^3, -6/L^2, 12/L^3, -6/L^2;
             6/L^2, 2/L, -6/L^2, 4/L];
for e = 1:m
    id = (2*e-1):(2*e+2);
    K00(id,id) = K00(id,id) + ke;
end
% --- Vector tai P ---
P00 = zeros(m2,1);
fe = q*L/2 * [-1; -L/6; -1; L/6];
for e = 1:m
    id = (2*e-1):(2*e+2);
    P00(id) = P00(id) + fe;
end
% --- Giai U0 ---
fixed = [1, m2-1];
free = setdiff(1:m2, fixed);
Kff = K00(free, free);
Pf = P00(free);
U0 = Kff \ Pf;
node_mid = ceil((m+1)/2);
global_dof_mid = 2*node_mid - 1;
idx_mid = find(free == global_dof_mid);
U_mid = U0(idx_mid);
% --- Chuan bi Delta Matrix ---
DeltaEi = zeros(m2,m2,m,NW);
const_val = E0*b_val/L^6;
d1 = const_val * [36*L^2, 24*L^3, -36*L^2, 12*L^3; 24*L^3, 16*L^4, -24*L^3, 8*L^4;
-36*L^2, -24*L^3, 36*L^2, -12*L^3; 12*L^3, 8*L^4, -12*L^3, 4*L^4];

```

```

d2 = const_val * [-144*L, -84*L^2, 144*L, -60*L^2; -84*L^2, -48*L^3, 84*L^2, -
36*L^3; 144*L, 84*L^2, -144*L, 60*L^2; -60*L^2, -36*L^3, 60*L^2, -24*L^3];
d3 = const_val * [144, 72*L, -144, 72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2; -144, -72*L, 144, -
72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2];
for e = 1:m
    DeltaEi((2*e-1):(2*e+2),(2*e-1):(2*e+2),e,1) = d1;
    DeltaEi((2*e-1):(2*e+2),(2*e-1):(2*e+2),e,2) = d2;
    DeltaEi((2*e-1):(2*e+2),(2*e-1):(2*e+2),e,3) = d3;
end
nfree = length(free);
DeltaKiB = zeros(nfree, nfree, m, NW);
for e = 1:m, for jj = 1:NW, DeltaKiB(:, :, e, jj) = DeltaEi(free, free, e, jj); end, end
% --- Gauss Setup 10 Diem ---
g = [-0.9739065285171717, -0.8650633666889845, -0.6794095682990244, ...
-0.4333953941292472, -0.1488743389816312, 0.1488743389816312, ...
0.4333953941292472, 0.6794095682990244, 0.8650633666889845, ...
0.9739065285171717];
w = [0.0666713443086881, 0.1494513491505806, 0.2190863625159820, ...
0.2692667193099963, 0.2955242247147529, 0.2955242247147529, ...
0.2692667193099963, 0.2190863625159820, 0.1494513491505806, ...
0.0666713443086881];
[G1,G2,G3,G4] = ndgrid(g,g,g,g);
[W1,W2,W3,W4] = ndgrid(w,w,w,w);
Wprod = W1 .* W2 .* W3 .* W4;
J = (h_val^2/4) * (L^2/4);
X1 = (L/2)*G1 + L/2; X2 = (L/2)*G2 + L/2;
Y1 = (h_val/2)*G3; Y2 = (h_val/2)*G4;
X1_pows = zeros([size(X1), NW]); X2_pows = zeros([size(X2), NW]);
for p = 0:(NW-1), X1_pows(:, :, :, p+1)=X1.^p; X2_pows(:, :, :, p+1)=X2.^p; end
COVs = zeros(1,length(corr_lengths));
Rchol = chol(Kff);
% --- Vong lap tinh toan COV ---
for tt = 1:length(corr_lengths)
    corr_x = corr_lengths(tt);
    corr_y = 0.01*L;
    % Hien thi trang thai tren nut bam
    set(hObject, 'String', sprintf('Dang tinh %d/%d...', tt, length(corr_lengths)));
    drawnow;
    Ccov = zeros(m*NW, m*NW);
    for e1 = 1:m
        for e2 = 1:m
            Deltae = L*(e2 - e1);
            Rff_grid = sigma^2 .* exp( -abs((L/2)*(G2-G1) + Deltae)./corr_x -
abs((h_val/2)*(G4-G3))./corr_y );
            baseGrid = J .* (Y1.^2 .* Y2.^2) .* Rff_grid .* Wprod;
            moment = zeros(NW,NW);
            for p = 1:NW
                for q = 1:NW
                    S = baseGrid .* X1_pows(:, :, :, p) .* X2_pows(:, :, :, q);
                    moment(p,q) = sum(S(:));
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end
% --- [FIX LOI 1] SUA CHI SO DE KHONG BI MISMATCH ---
row_start = (e1-1)*NW + 1; row_end = (e1-1)*NW + NW;
col_start = (e2-1)*NW + 1; col_end = (e2-1)*NW + NW;
Ccov(row_start:row_end, col_start:col_end) = moment;
end
end
B = zeros(nfree, m*NW); col = 0;
for e = 1:m
    for ii = 1:NW
        col = col + 1;
        rhs = DeltaKiB(:, :, e, ii) * U0;
        B(:, col) = Rchol \ (Rchol' \ rhs);
    end
end
Mmat = B * Ccov;
VarU_vec = sum(B .* Mmat, 2);
COVs(tt) = sqrt(VarU_vec(idx_mid)) / abs(U_mid);
end
% --- 4. VE DO THI
axes(hAx); cla;
x_ratio = corr_lengths / L1;
semilogx(hAx, x_ratio, COVs, 'b-s', 'LineWidth', 2, 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize',
6);
grid(hAx, 'on');
set(hAx, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
xlabel(hAx, 'Ty le tuong quan \lambda = d / L', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold');
ylabel(hAx, 'He so bien dong COV', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold');
title(hAx, sprintf('Ket qua COV (Sigma = %.2f)', sigma), 'FontSize', 12);
if max(COVs) > 0
    ylim(hAx, [min(COVs)*0.8, max(COVs)*1.2]);
end
set(hObject, 'String', 'HOAN TAT (Bam de chay lai)', 'Enable', 'on');
% --- LUU DU LIEU CHO NUT EXCEL ---
results.x_ratio = x_ratio;
results.COVs = COVs;
results.L1 = L1; results.h = h_val; results.b = b_val;
results.q = q; results.E0 = E0; results.sigma = sigma;
results.m = m; results.NW = NW;
guidata(hFig, results);
set(hBtnExcel, 'Enable', 'on');
msgbox('Da tinh toan xong! Bam XUAT EXCEL de luu.', 'Thong bao');
catch err
    set(hObject, 'String', 'LOI! (Bam de thu lai)', 'Enable', 'on');
    errorldg(err.message, 'Loi chuong trinh');
end
set(hFig, 'Pointer', 'arrow');
end
% --- 6. HAM XUAT EXCEL (DA SUA DE CHAY TREN MATLAB CU) ---
function export_excel_callback(~, ~)
    % Lay du lieu da luu

```

```

results = guidata(hFig);
if isempty(results)
    errordlg('Khong co du lieu de xuat!', 'Loi');
    return;
end
% Hop thoai chon file
[file, path] = uiputfile('*.xlsx', 'Luu ket qua SFEM');
if isequal(file, 0)
    return;
end
fullFileName = fullfile(path, file);
try
    % --- [FIX LOI 2] DUNG XLSWRITE THAY CHO TABLE ---
    % 1. Chuan bi du lieu Sheet 1 (Ket Qua)
    headers1 = {'TyLe_TuongQuan_d_L', 'COV_ChuyenVi'};
    data1 = [results.x_ratio(:), results.COVs(:)];
    % Ghep header va data vao 1 cell array
    sheet1_content = [headers1; num2cell(data1)];
    % 2. Chuan bi du lieu Sheet 2 (Thong So)
    headers2 = {'ThongSo', 'GiaTri'};
    param_names = {'ChieuDai_L'; 'ChieuCao_h'; 'BeRong_b'; 'TaiTrong_q'; ...
        'Modun_E0'; 'Sigma_E'; 'SoPhanTu_m'; 'SoHangTu_NW'};
    param_vals = [results.L1; results.h; results.b; results.q; ...
        results.E0; results.sigma; results.m; results.NW];
    sheet2_content = [headers2; param_names, num2cell(param_vals)];
    % 3. Ghi file Excel bang xlswrite (tuong thich moi phien ban)
    xlswrite(fullFileName, sheet1_content, 'KetQua');
    xlswrite(fullFileName, sheet2_content, 'ThongSoDauVao');
    msgbox(['Da luu thanh cong tai: ' fullFileName], 'Thong bao');
catch err
    errordlg(['Loi khi ghi file Excel: ' err.message], 'Loi Xuat File');
end
end
end
function SFEM_GUI_TINH
    clc; close all;
    % --- 1. KHOI TAO GIAO DIEN (GUI) ---
    hFig = figure('Name', 'SFEM 3D Analysis (Fixed for MATLAB 2012)', ...
        'NumberTitle', 'off', ...
        'Units', 'normalized', ...
        'Position', [0.1 0.1 0.85 0.75], ...
        'Color', [0.95 0.95 0.95]);
    % Tao Panel nhap lieu
    hPanelInput = uipanel('Parent', hFig, ...
        'Title', 'THONG SO DAU VAO', ...
        'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
        'Position', [0.01 0.02 0.25 0.96], ...
        'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95]);
    % --- Cac truong nhap lieu ---
    add_input(hPanelInput, 'Chieu dai nhip L(m):', '5', 'in_L1', 0.92);
    add_input(hPanelInput, 'Be rong b(m):', '0.25', 'in_b', 0.84);

```



```

add_input(hPanelInput, 'Chieu cao h(m):', '0.4', 'in_h', 0.76);
add_input(hPanelInput, 'Tai trong q(N/m):', '10000', 'in_q', 0.68);
add_input(hPanelInput, 'Modun E0(Pa):', '30e9', 'in_E0', 0.60);
add_input(hPanelInput, 'COV_E', '0.05', 'in_sigma', 0.52);
add_input(hPanelInput, 'So phan tu m:', '20', 'in_m', 0.44); %
% Ty le tuong quan
uicontrol('Parent', hPanelInput, 'Style', 'text', 'String', 'Ty le dy/L1 (Vector):', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.36 0.9 0.03], ...
    'HorizontalAlignment', 'left', 'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95]);
uicontrol('Parent', hPanelInput, 'Style', 'edit', ...
    'String', '[0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 5, 20, 100]', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.28 0.9 0.08], ...
    'Max', 2, 'Tag', 'in_ratios', 'BackgroundColor', 'white');
% Nut Bam CHAY
uicontrol('Parent', hPanelInput, 'Style', 'pushbutton', ...
    'String', 'TINH TOAN', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.05 0.45 0.1], ...
    'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
    'BackgroundColor', [0 0.5 0], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Callback', @run_simulation);
% Nut Bam XUAT EXCEL
hBtnExcel = uicontrol('Parent', hPanelInput, 'Style', 'pushbutton', ...
    'String', 'XUAT EXCEL', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.52 0.05 0.43 0.1], ...
    'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
    'BackgroundColor', [0.2 0.4 0.8], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Enable', 'off', ...
    'Callback', @export_excel_callback);
% --- Vung Do Thi ---
hAxes = axes('Parent', hFig, ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.32 0.15 0.65 0.75], ...
    'Box', 'on');
grid on; title('Ket qua phan tich');
% Luu handles
myHandles.hAx = hAxes;
myHandles.hBtnExcel = hBtnExcel;
guidata(hFig, myHandles);
% --- HAM CON ---
function add_input(parent, label, val, tag, y_pos)
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'text', 'String', label, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos 0.9 0.03], ...
        'HorizontalAlignment', 'left', 'BackgroundColor', [0.95 0.95 0.95]);
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'edit', 'String', val, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos-0.05 0.9 0.05], ...
        'Tag', tag, 'BackgroundColor', 'white'); end
% --- 2. MAIN CALLBACK ---
function run_simulation(hObject, ~)
    hFigMain = get(get(hObject, 'Parent'), 'Parent');
    myHandles = guidata(hFigMain);
    hAx = myHandles.hAx;
    try

```

```

set(hObject, 'String', 'Dang tinh...', 'Enable', 'off');
set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'off');
pause(0.01);
% Lay du lieu
L1 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_L1'), 'String'));
b = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_b'), 'String'));
h = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_h'), 'String'));
q = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_q'), 'String'));
E0 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_E0'), 'String'));
sigma = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_sigma'), 'String'));
m = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_m'), 'String'));
ratio_str = get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_ratios'), 'String');
ratio_vec = str2num(ratio_str);
if isempty(ratio_vec), error('Loi: Hay nhap vector ty le hop le!'); end
I = 1/12*b*h^3;
L = L1/m;
NW = 3;
m2 = 2*(m+1);
dy = ratio_vec * L1;
% --- Tinh FEM Tat Dinh ---
K00 = zeros(m2,m2);
ke_block = E0*I * [ 12/L^3, 6/L^2, -12/L^3, 6/L^2;
                   6/L^2, 4/L, -6/L^2, 2/L;
                   -12/L^3, -6/L^2, 12/L^3, -6/L^2;
                   6/L^2, 2/L, -6/L^2, 4/L];
for e = 1:m
    id = (2*e-1):(2*e+2);
    K00(id,id) = K00(id,id) + ke_block;
end
P00 = zeros(m2,1);
fe_block = q*L/2 * [-1; -L/6; -1; L/6];
for e = 1:m
    id = (2*e-1):(2*e+2);
    P00(id) = P00(id) + fe_block;
end
fixed = [1, m2-1];
free = setdiff(1:m2, fixed);
K00B = K00(free, free);
P0B = P00(free);
U0 = K00B \ P0B;
node_mid = ceil((m+1)/2);
global_dof_mid = 2*node_mid - 1;
idx_mid = find(free == global_dof_mid);
if isempty(idx_mid)
    % Fallback neu khong tim thay dof chinh xac
    idx_mid = round(length(free)/2);
end
U_mid = U0(idx_mid);
% --- Chuan bi Delta Matrix ---
DeltaEi = zeros(m2,m2,m,NW);

```

```

d1 = (E0 / L^6) * [36*L^2, 24*L^3, -36*L^2, 12*L^3; 24*L^3, 16*L^4, -24*L^3, 8*L^4;
-36*L^2, -24*L^3, 36*L^2, -12*L^3; 12*L^3, 8*L^4, -12*L^3, 4*L^4];
d2 = (E0 / L^6) * [-144*L, -84*L^2, 144*L, -60*L^2; -84*L^2, -48*L^3, 84*L^2, -
36*L^3; 144*L, 84*L^2, -144*L, 60*L^2; -60*L^2, -36*L^3, 60*L^2, -24*L^3];
d3 = (E0 / L^6) * [144, 72*L, -144, 72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2; -144, -72*L, 144, -
72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2];
for e = 1:m
    id = (2*e-1):(2*e+2);
    DeltaEi(id,id,e,1) = d1; DeltaEi(id,id,e,2) = d2; DeltaEi(id,id,e,3) = d3;
end
nfree = numel(free);
DeltaKiB = zeros(nfree, nfree, m, NW);
for e = 1:m
    for ii = 1:NW
        DeltaKiB(:, :, e, ii) = DeltaEi(free, free, e, ii);
    end
end
g = [-0.9739065285171717, -0.8650633666889845, -0.6794095682990244, ...
-0.4333953941292472, -0.1488743389816312, 0.1488743389816312, ...
0.4333953941292472, 0.6794095682990244, 0.8650633666889845, ...
0.9739065285171717];
w = [0.0666713443086881, 0.1494513491505806, 0.2190863625159820, ...
0.2692667193099963, 0.2955242247147529, 0.2955242247147529, ...
0.2692667193099963, 0.2190863625159820, 0.1494513491505806, ...
0.0666713443086881];
[G1,G2,G3,G4,G5,G6] = ndgrid(g,g,g,g,g,g);
X1_phys = (L/2) * G1(:) + L/2; X2_phys = (L/2) * G2(:) + L/2;
Y1_phys = (h/2) * G3(:); Y2_phys = (h/2) * G4(:);
Z1_phys = (b/2) * G5(:); Z2_phys = (b/2) * G6(:);
[W1,W2,W3,W4,W5,W6] = ndgrid(w,w,w,w,w,w);
Wprod = (W1(:) .* W2(:) .* W3(:) .* W4(:) .* W5(:) .* W6(:));
Y1sq = (Y1_phys).^2; Y2sq = (Y2_phys).^2;
J = (h^2/4) * (L^2/4) * (b^2/4);
COVT1 = zeros(size(dy));
for tt = 1:length(dy)
    dx_val = dy(tt); dz_val = dy(tt);
    EX = zeros(NW,NW,m,m);
    % Tinh ma tran Hiep phuong sai (Heavy computation)
    for e1 = 1:m
        for e2 = 1:m
            Deltae = L * (e2 - e1);
            Xdiff = X2_phys - X1_phys; Ydiff = Y2_phys - Y1_phys; Zdiff = Z2_phys -
Z1_phys;
            Rff_vec = sigma^2 .* exp( -abs(Xdiff + Deltae) ./ dx_val - abs(Ydiff) ./ dy(tt) -
abs(Zdiff) ./ dz_val );

            % Vectorized sum
            term_common = Wprod .* J .* Y1sq .* Y2sq .* Rff_vec;
            for i1 = 1:NW
                X1pow = X1_phys .^ (i1-1);
                for i2 = 1:NW

```

```

        X2pow = X2_phys .^ (i2-1);
        integrand = term_common .* X1pow .* X2pow;
        EX(i1,i2,e1,e2) = sum(integrand);
    end
end
end
% Lap ghép Ccov
Kcols = m * NW;
Ccov = zeros(Kcols, Kcols);
for e1 = 1:m
    for e2 = 1:m
        % Gan tung phan tu scalar de dam bao an toan tuyet doi ve dimension
        for i1 = 1:NW
            for i2 = 1:NW
                row = (e1-1)*NW + i1;
                col = (e2-1)*NW + i2;
                Ccov(row, col) = EX(i1,i2,e1,e2);
            end
        end
    end
end
% Giai he phuong trinh
useChol = true;
try, Rchol = chol(K00B); catch, useChol = false; end
B_matrix = zeros(nfree, Kcols);
col_idx = 0;
for e = 1:m
    for ii = 1:NW
        col_idx = col_idx + 1;
        rhs = DeltaKiB(:,e,ii) * U0;
        if useChol, x_sol = Rchol \ (Rchol' \ rhs); else, x_sol = K00B \ rhs; end
        B_matrix(:, col_idx) = x_sol;
    end
end
M_mat = B_matrix * Ccov;
VarU_vec = sum( B_matrix .* M_mat, 2 );
cov_mid = sqrt( VarU_vec(idx_mid) ) / abs( U0(idx_mid) );
COVT1(tt) = cov_mid;
set(hObject, 'String', sprintf('Dang tinh... %d/%d', tt, length(dy))); drawnow;
end
% --- 3. VE DO THI
axes(hAx); cla;
ratio_corr_L1 = dy / L1;
semilogx(ratio_corr_L1, COVT1, '-bs', 'LineWidth', 1.5, ...
    'MarkerFaceColor', 'c', 'MarkerSize', 6);
hold on; grid on;
xlabel('Ty so do dai tuong quan d / L', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('He so bien dong COV(U_{mid})', 'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold');
title(['Ket qua COV 3D (Sigma = ' num2str(sigma) ')], 'FontSize', 12);
set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');

```

```

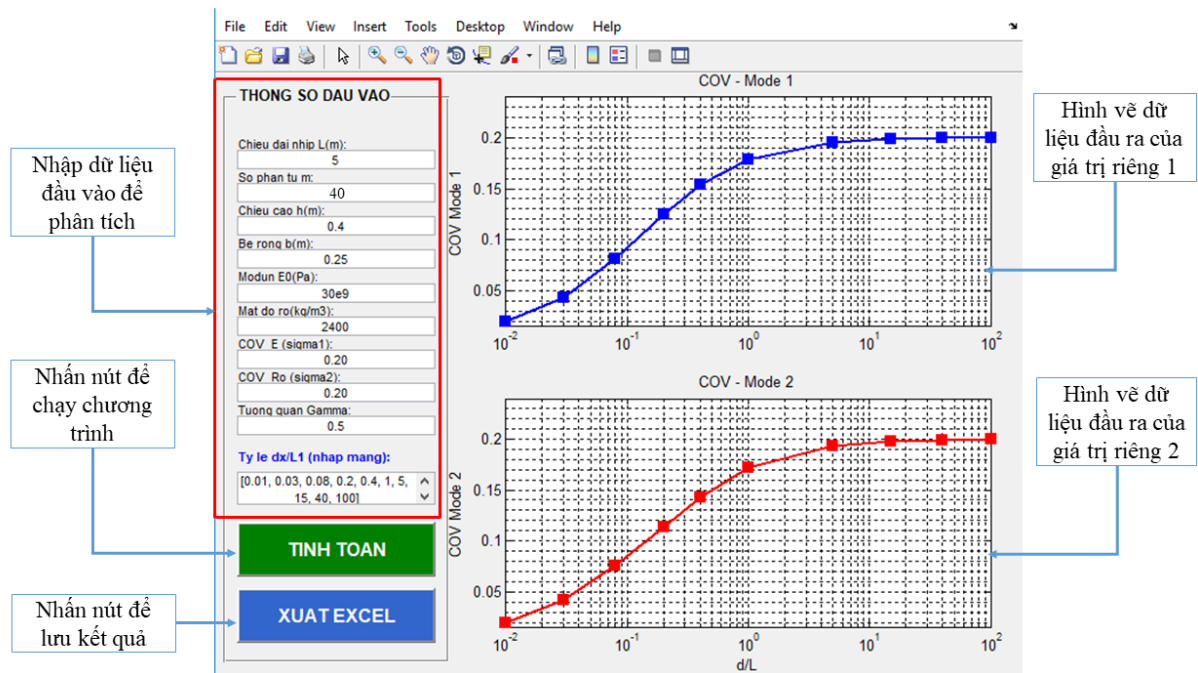
if max(COVT1) > 0
    ylim([min(COVT1)*0.8, max(COVT1)*1.2]);
end
set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on');
% Luu ket qua de xuat Excel
myHandles.results.x_ratio = ratio_corr_L1;
myHandles.results.COVs = COVT1;
myHandles.results.inputs = [L1, b, h, q, E0, sigma, m];
guidata(hFigMain, myHandles);
set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'on');
msgbox('Tinh xong! Bam XUAT EXCEL de luu.', 'Thong bao');
catch err
    set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on');
    errorldg(err.message, 'Loi Chuong Trinh');
end
end
% --- 4. CALLBACK XUAT EXCEL (FIX CHO MATLAB 2012) ---
function export_excel_callback(~, ~)
    myHandles = guidata(gcf);
    if ~isfield(myHandles, 'results')
        errorldg('Chua co du lieu!', 'Loi'); return;
    end
    results = myHandles.results;
    % Chon file
    [file, path] = uiputfile('*.xls', 'Luu Ket Qua');
    if isequal(file, 0), return; end
    fullFileName = fullfile(path, file);
    % KIEM TRA XEM FILE CO DANG MO KHONG
    if exist(fullFileName, 'file')
        try
            fid = fopen(fullFileName, 'a');
            if fid == -1
                errorldg('File Excel dang mo! Hay dong file lai roi thu lai.', 'Loi Truy Cap');
                return;
            end
            fclose(fid);
        catch
        end
    end
    try
        % Header va Data (Dung Cell Array thay vi Table)
        data_cells = {'TyLe_d_L', 'COV_U_Mid'}; % Header
        % Ghep du lieu so vao cell
        numeric_data = [results.x_ratio(:), results.COVs(:)];
        data_cells = [data_cells; num2cell(numeric_data)];
        % Thong so
        param_cells = {'ThongSo', 'GiaTri';
            'L1', results.inputs(1);
            'b', results.inputs(2);
            'h', results.inputs(3);
            'q', results.inputs(4);

```

```

'E0', results.inputs(5);
'Sigma', results.inputs(6);
'm', results.inputs(7));
% Ghi file
xlswrite(fullFileName, data_cells, 'KetQua');
xlswrite(fullFileName, param_cells, 'ThongSoDauVao');
msgbox(['Luu thanh cong: ' fullFileName], 'Thong bao');
catch err
    errorldg(['Loi Ghi File (Co the do chua Active Windows?): ' err.message], 'Loi Xuat
File');
end
end
end
end

```



Hình E.2. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán phân tích đặc trưng động lực học tuyến tính

B.1. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình được biên dịch với giao diện người dùng đồ họa (GUI) trong môi trường MATLAB.

Trình tự thao tác như sau:

1. **Khởi tạo:** Mở phần mềm MATLAB. Sao chép và dán toàn bộ mã nguồn tại mục B.4 vào một kịch bản (script) mới, lưu tên tệp là Daodong_GUI.m.
2. **Kích hoạt giao diện:** Trong Command Window của MATLAB, gõ lệnh Daodong_GUI và nhấn Enter để gọi giao diện làm việc.
3. **Nhập liệu vật lý:** Tại Panel "**THÔNG SỐ ĐẦU VÀO**", lần lượt nhập các đặc trưng về hình học (Nhịp, kích thước mặt cắt ngang) và vật liệu (Mô đun đàn hồi, Mật độ khối lượng). Nhập các chỉ số phân tán thống kê (COV) và hệ số tương quan γ giữa E và ρ
4. **Phân tích Eigenvalue:** Nhấn nút "**TÍNH TOÁN**".

5. **Đánh giá kết quả:** Hệ thống sẽ kết xuất tự động hai đồ thị trực quan ở phần viền phải giao diện, biểu thị sự phụ thuộc của Hệ số biến thiên (COV) Tần số Mode 1 và Mode 2 theo sự thay đổi của chiều dài tương quan.
6. **Lưu trữ:** Nhấn nút "XUẤT EXCEL" để tải về các tệp dữ liệu số liệu chi tiết.

B.2. Tập dữ liệu đầu vào (Input Data)

Các tham số đầu vào được phân tách thành 3 nhóm cơ bản trong cửa sổ GUI:

- **Nhóm Hình học & Lưới:**
 - **Chiều dài nhịp L (m):** Nhịp dầm (Ví dụ: 5).
 - **Số phân tử m:** Số lượng phân tử hữu hạn (Ví dụ: 40).
 - **Chiều cao h (m):** Chiều cao mặt cắt (Ví dụ: 0.4).
 - **Be rộng b (m):** Bề rộng mặt cắt (Ví dụ: 0.25).
- **Nhóm Vật liệu danh nghĩa:**
 - **Modun E0 (Pa):** Kỳ vọng mô đun đàn hồi (Ví dụ: 30e9).
 - **Mat do ro (kg/m3):** Kỳ vọng khối lượng riêng (Ví dụ: 2400).
- **Nhóm Trường ngẫu nhiên đa biến:**
 - **COV_E (sigma1):** Hệ số biến thiên của trường Mô đun đàn hồi (Ví dụ: 0.20).
 - **COV_Ro (sigma2):** Hệ số biến thiên của trường Khối lượng riêng (Ví dụ: 0.20).
 - **Tương quan Gamma:** Mức độ phụ thuộc tuyến tính (cross-correlation) giữa E và ρ (Ví dụ: 0.5).
 - **Tỷ lệ d/L (nhap mang):** Mảng tỷ lệ chiều dài tương quan để quét phân tích độ nhảy (Ví dụ: [0.01, 0.03, 0.08, 0.2, 0.4, 1, 5, 15, 40, 100]).

B.3. Tập dữ liệu đầu ra (Output Data)

Cơ sở dữ liệu sau khi được phân tích sẽ trích xuất ra tệp Excel bao gồm 2 trang tính (Sheets):

- **Sheet "KetQua":** Chứa 4 cột cấu trúc số liệu chính:
 - $Ty_le_d_L$: Tỷ số d/L
 - dx_m : Chiều dài tương quan dọc trục tuyệt đối (tính bằng mét).
 - COV_Mode1 : Mức độ phân tán (COV) của Giá trị riêng thứ nhất
 - COV_Mode2 : Mức độ phân tán (COV) của Giá trị riêng thứ hai
- **Sheet "ThongSoDauVao":** Lưu trữ toàn bộ 9 thông số thiết lập của quá trình mô phỏng.

B.4. Bản in câu lệnh chương trình (Source Code)

```
function Daodong_GUI
clc; close all;
% --- 1. THIET LAP GIAO DIEN ---
hFig = figure('Name', 'Daodong2D - Standard Colors (MATLAB 2012)', ...
    'NumberTitle', 'off', ...
    'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.1 0.05 0.8 0.9], ...
    'Color', [0.94 0.94 0.94]);
% --- Panel Input (Ben trai) ---
```

```

hPanel = uipanel('Parent', hFig, 'Title', 'THONG SO DAU VAO', ...
    'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
    'Position', [0.01 0.02 0.28 0.96]);
add_param(hPanel, 1, 'Chieu dai nhip L(m):', '5', 'in_L1');
add_param(hPanel, 2, 'So phan tu m:', '20', 'in_m');
add_param(hPanel, 3, 'Chieu cao h(m):', '0.4', 'in_h');
add_param(hPanel, 4, 'Be rong b(m):', '0.25', 'in_b');
add_param(hPanel, 5, 'Modun E0(Pa):', '30e9', 'in_E0');
add_param(hPanel, 6, 'Mat do ro(kg/m3):', '2400', 'in_ro');
add_param(hPanel, 7, 'COV_E (sigma1):', '0.20', 'in_sig1');
add_param(hPanel, 8, 'COV_Ro (sigma2):', '0.20', 'in_sig2');
add_param(hPanel, 9, 'Tuong quan Gamma:', '0.5', 'in_gama');
% O nhap vector Ty le
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'text', 'String', 'Ty le dx/L1 (nhap mang):', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.35 0.9 0.03], ...
    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontWeight', 'bold', 'ForegroundColor', 'b');
default_ratios = '[0.01, 0.03, 0.08, 0.2, 0.4, 1, 5, 15, 40, 100]';
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'edit', ...
    'String', default_ratios, ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.28 0.9 0.06], ...
    'Max', 2, 'Tag', 'in_ratios', 'BackgroundColor', 'white');
% --- Khu vuc ve Do thi (Ben phai - Tach lam 2) ---
hAx1 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.36 0.58 0.60 0.38], 'Box', 'on');
grid on; title('COV - Mode 1'); ylabel('COV Mode 1');
hAx2 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.36 0.08 0.60 0.38], 'Box', 'on');
grid on; title('COV - Mode 2'); ylabel('COV Mode 2'); xlabel('d/L');
% Luu handles
handles.Ax1 = hAx1; handles.Ax2 = hAx2;
handles.hBtnExcel = hBtnExcel;
guidata(hFig, handles);
% --- HAM CON ---
function add_param(parent, idx, lbl, val, tag)
    y_pos = 0.92 - (idx-1)*0.06;
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'text', 'String', lbl, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos 0.9 0.025], ...
        'HorizontalAlignment', 'left');
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'edit', 'String', val, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos-0.035 0.9 0.035], ...
        'Tag', tag, 'BackgroundColor', 'white');
end
function run_calculation(hObject, ~)
    hFigMain = get(get(hObject, 'Parent'), 'Parent');
    myHandles = guidata(hFigMain);
    try
        set(hObject, 'String', 'Dang tinh...', 'Enable', 'off');
        set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'off');
        drawnow; pause(0.01);
        % --- 1. DOC DU LIEU ---
        L1 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_L1'), 'String'));

```



```

m = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_m'), 'String'));
h = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_h'), 'String'));
b = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_b'), 'String'));
E0 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_E0'), 'String'));
ro = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_ro'), 'String'));
sigma1 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_sig1'), 'String'));
sigma2 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_sig2'), 'String'));
gama = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_gama'), 'String'));
ratios_str = get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_ratios'), 'String');
ratios_vec = str2num(ratios_str);
if isempty(ratios_vec)
    error('Loi: Hay nhap vector ty le hop le (Vi du: [0.1, 1, 10])');
end
dx = ratios_vec * L1;
% --- 2. LOGIC TINH TOAN ---
L = L1/m;
I = 1/12*b*h^3;
m2 = 2*(m+1);
NW = 3;
Ke_template = [12, 6*L, -12, 6*L; 6*L, 4*L^2, -6*L, 2*L^2; -12, -6*L, 12, -6*L; 6*L,
2*L^2, -6*L, 4*L^2];
Ke_template = (E0*I/L^3) * Ke_template;
Me_coeff = (ro*b*h*L/420);
Me_template = Me_coeff * [156, 22*L, 54, -13*L; 22*L, 4*L^2, 13*L, -3*L^2; 54,
13*L, 156, -22*L; -13*L, -3*L^2, -22*L, 4*L^2];
K00 = zeros(m2); M00 = zeros(m2);
for e = 1:m
    dof = [2*e-1, 2*e, 2*e+1, 2*e+2];
    K00(dof,dof) = K00(dof,dof) + Ke_template;
    M00(dof,dof) = M00(dof,dof) + Me_template;
end
idxB = [2:(m2-2), m2];
K00B = K00(idxB, idxB); M00B = M00(idxB, idxB);
[Vall,Dall] = eig(K00B, M00B);
lambda_all = diag(Dall);
[TR_sorted, ind_sort] = sort(lambda_all);
TR = TR_sorted(1:3); Vall = Vall(:, ind_sort);
PhiC = cell(3,1);
for mode = 1:3
    v = Vall(:,mode);
    if abs(v(1)) < eps, v(1) = 1e-6; end
    v = v / v(1);
    a = sqrt(v' * M00B * v);
    PhiC{mode} = v / a;
end
Phi1C = PhiC{1}; Phi2C = PhiC{2};
DeltaKE_templates = zeros(4,4,NW);
DeltaKE_templates(:, :, 1) = (E0*b/L^6) * [36*L^2, 24*L^3, -36*L^2, 12*L^3; 24*L^3,
16*L^4, -24*L^3, 8*L^4; -36*L^2, -24*L^3, 36*L^2, -12*L^3; 12*L^3, 8*L^4, -12*L^3,
4*L^4];

```

```

DeltaKE_templates(:, :, 2) = (E0*b/L^6) * [-144*L, -84*L^2, 144*L, -60*L^2; -84*L^2, -
48*L^3, 84*L^2, -36*L^3; 144*L, 84*L^2, -144*L, 60*L^2; -60*L^2, -36*L^3, 60*L^2, -
24*L^3];
DeltaKE_templates(:, :, 3) = (E0*b/L^6) * [144, 72*L, -144, 72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L,
36*L^2; -144, -72*L, 144, -72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2];
DeltaME_templates = zeros(4,4,7);
DeltaME_templates(:, :, 1) = b*ro * diag([1 0 0 0]);
DeltaME_templates(:, :, 2) = b*ro * [0,1,0,0; 1,0,0,0; 0,0,0,0; 0,0,0,0];
DeltaME_templates(:, :, 3) = (b*ro/L^2) * [-6, -2*L, 3, -L; -2*L, L^2, 0, 0; 3, 0, 0, 0; -L,
0, 0, 0];
DeltaME_templates(:, :, 4) = (b*ro/L^3) * [4, -2*L, -2, L; -2*L, -4*L^2, 3*L, -L^2; -2,
3*L, 0, 0; L, -L^2, 0, 0];
DeltaME_templates(:, :, 5) = (b*ro/L^4) * [9, 8*L, -9, 3*L; 8*L, 6*L^2, -8*L, 3*L^2; -9, -
8*L, 9, -3*L; 3*L, 3*L^2, -3*L, L^2];
DeltaME_templates(:, :, 6) = (b*ro/L^5) * [-12, -7*L, 12, -5*L; -7*L, -4*L^2, 7*L, -
3*L^2; 12, 7*L, -12, 5*L; -5*L, -3*L^2, 5*L, -2*L^2];
DeltaME_templates(:, :, 7) = (b*ro/L^6) * [4, 2*L, -4, 2*L; 2*L, L^2, -2*L, L^2; -4, -2*L,
4, -2*L; 2*L, L^2, -2*L, L^2];
nB = length(idxB); mapToB = zeros(m,1); for k=1:nB, mapToB(idxB(k))=k; end
DeltaKiB = zeros(nB,nB,m,NW); DeltaMiB = zeros(nB,nB,m,7);
for e = 1:m
    dof = [2*e-1, 2*e, 2*e+1, 2*e+2]; pos = mapToB(dof); valid = pos>0;
    for i = 1:NW, Ke_loc = DeltaKE_templates(:, :, i); DeltaKiB(pos(valid), pos(valid), e, i) =
Ke_loc(valid, valid); end
    for i = 1:7, Me_loc = DeltaME_templates(:, :, i); DeltaMiB(pos(valid), pos(valid), e, i) =
Me_loc(valid, valid); end
end
gp = [-0.9739065285171717, -0.8650633666889845, -0.6794095682990244, ...
-0.4333953941292472, -0.1488743389816312, 0.1488743389816312, ...
0.4333953941292472, 0.6794095682990244, 0.8650633666889845, ...
0.9739065285171717];
gw = [0.0666713443086881, 0.1494513491505806, 0.2190863625159820, ...
0.2692667193099963, 0.2955242247147529, 0.2955242247147529, ...
0.2692667193099963, 0.2190863625159820, 0.1494513491505806, ...
0.0666713443086881];
COV1_ammot = zeros(1, length(dx));
COV2_ammot = zeros(1, length(dx));
for ii = 1:length(dx)
    set(hObject, 'String', sprintf('Dang tinh %d/%d...', ii, length(dx))); drawnow;
    dy = dx(ii);
    EXi1Xi2T = zeros(NW, NW, m, m); EYi1Yi2T = zeros(7, 7, m, m); EXi1Yi2T =
zeros(3, 7, m, m);
    for e1 = 1:m
        for e2 = 1:m
            Deltae1e2 = L*(e2-e1);
            sum_EX = zeros(NW, NW); sum_EY = zeros(7, 7); sum_EXY = zeros(3, 7);
            for k11 = 1:10
                x1 = gp(k11); w1 = gw(k11);
                for k21 = 1:10
                    x2 = gp(k21); w2 = gw(k21);
                    for k31 = 1:10

```

```

y1 = gp(k31); w3 = gw(k31);
for k41 = 1:10
    y2 = gp(k41); w4 = gw(k41);
    W = w1*w2*w3*w4;
    Rff = sigma1^2 * exp(-abs(((L/2)*(x2-x1)+Deltae1e2)/dx(ii)) -
abs((h/2*(y2-y1))/dy));
    Rgg = sigma2^2 * exp(-abs(((L/2)*(x2-x1)+Deltae1e2)/dx(ii)) -
abs((h/2*(y2-y1))/dy));
    Rfg = gama*sigma1*sigma2* exp(-abs(((L/2)*(x2-
x1)+Deltae1e2)/dx(ii)) - abs((h/2*(y2-y1))/dy));
    tX1 = ((L/2)*x1+L/2); tX2 = ((L/2)*x2+L/2);
    tY1 = (h/2*y1); tY2 = (h/2*y2);
    const = (h^2/4)*(L^2/4);
    for i1=1:NW, for i2=1:NW
        sum_EX(i1,i2) = sum_EX(i1,i2) + W*const*tX1^(i1-1)*tX2^(i2-
1)*tY1^2*tY2^2*Rff;
    end, end
    for i1=1:7, for i2=1:7
        sum_EY(i1,i2) = sum_EY(i1,i2) + W*const*tX1^(i1-1)*tX2^(i2-
1)*Rgg;
    end, end
    for i1=1:3, for i2=1:7
        sum_EXY(i1,i2) = sum_EXY(i1,i2) + W*const*tX1^(i1-1)*tX2^(i2-
1)*tY1^2*Rfg;
    end, end
end
end
end
end
EXi1Xi2T(:, :, e1, e2) = sum_EX; EYi1Yi2T(:, :, e1, e2) = sum_EY;
EXi1Yi2T(:, :, e1, e2) = sum_EXY;
end
end
Var1 = 0; Var2 = 0;
for e1 = 1:m
    for e2 = 1:m
        t1=0; for i1=1:NW, for i2=1:NW,
t1=t1+(Phi1C'*DeltaKiB(:, :, e1, i1)*Phi1C)*(Phi1C'*DeltaKiB(:, :, e2, i2)*Phi1C)*EXi1Xi2T(i1, i2
, e1, e2); end, end
        t2=0; for i1=1:7, for i2=1:7, t2=t2+(Phi1C*(-
TR(1))*DeltaMiB(:, :, e1, i1)*Phi1C)*(Phi1C*(-
TR(1))*DeltaMiB(:, :, e2, i2)*Phi1C)*EYi1Yi2T(i1, i2, e1, e2); end, end
        t3=0; for i1=1:NW, for i2=1:7,
t3=t3+(Phi1C'*DeltaKiB(:, :, e1, i1)*Phi1C)*(Phi1C*(-
TR(1))*DeltaMiB(:, :, e2, i2)*Phi1C)*EXi1Yi2T(i1, i2, e1, e2); end, end
        Var1 = Var1 + t1 + t2 + 2*t3;
        t1=0; for i1=1:NW, for i2=1:NW,
t1=t1+(Phi2C'*DeltaKiB(:, :, e1, i1)*Phi2C)*(Phi2C'*DeltaKiB(:, :, e2, i2)*Phi2C)*EXi1Xi2T(i1, i2
, e1, e2); end, end

```

```

        t2=0; for i1=1:7, for i2=1:7, t2=t2+(Phi2C*(-
TR(2))*DeltaMiB(:,e1,i1)*Phi2C)*(Phi2C*(-
TR(2))*DeltaMiB(:,e2,i2)*Phi2C)*EYi1Yi2T(i1,i2,e1,e2); end, end
        t3=0; for i1=1:NW, for i2=1:7,
t3=t3+(Phi2C*DeltaKiB(:,e1,i1)*Phi2C)*(Phi2C*(-
TR(2))*DeltaMiB(:,e2,i2)*Phi2C)*EXi1Yi2T(i1,i2,e1,e2); end, end
        Var2 = Var2 + t1 + t2 + 2*t3;
    end
end
    COV1_ammot(ii) = sqrt(Var1)/TR(1);
    COV2_ammot(ii) = sqrt(Var2)/TR(2);
end
% --- 3. VE DO THI ---
axes(myHandles.Ax1); cla;
semilogx(ratios_vec, COV1_ammot, '-bs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'b',
'MarkerSize', 6);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('COV - Mode 1'); ylabel('COV Mode 1');
if max(COV1_ammot) > 0, ylim([min(COV1_ammot)*0.8, max(COV1_ammot)*1.2]);
end
axes(myHandles.Ax2); cla;
semilogx(ratios_vec, COV2_ammot, '-rs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'r',
'MarkerSize', 6);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('COV - Mode 2'); ylabel('COV Mode 2'); xlabel('d/L');
if max(COV2_ammot) > 0, ylim([min(COV2_ammot)*0.8, max(COV2_ammot)*1.2]);
end
set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on');
% --- LUU DU LIEU VAO HANDLES DE XUAT EXCEL ---
Res.ratios = ratios_vec; Res.dx = dx;
Res.COV1 = COV1_ammot; Res.COV2 = COV2_ammot;
Res.inputs = [L1, m, h, b, E0, ro, sigma1, sigma2, gama];
myHandles.Results = Res;
guidata(hFigMain, myHandles);
set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'on');
msgbox('Tinh toan xong! Hay bam nut XUAT EXCEL.', 'Thong bao');
catch err
    set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on');
    errorldg(err.message, 'Loi Chuong Trinh');
end
end
% --- 2. EXCEL EXPORT CALLBACK ---
function export_excel_callback(~, ~)
    data = guidata(gcf);
    if ~isfield(data, 'Results'), errorldg('Khong co du lieu!', 'Loi'); return; end
    Res = data.Results;
    [file, path] = uiputfile('*.xls', 'Luu ket qua Dao Dong');
    if isequal(file, 0), return; end
    fullPath = fullfile(path, file);
    try
        if exist(fullPath, 'file')

```

```

        fid = fopen(fullPath, 'a');
        if fid == -1, errordlg('File dang mo! Hay dong file Excel lai.', 'Loi'); return; end
        fclose(fid);
    end
    Header = {'Ty_le_d_L', 'dx_m', 'COV_Mode1', 'COV_Mode2'};
    Values = [Res.ratios(:), Res.dx(:), Res.COV1(:), Res.COV2(:)];
    data_cell = [Header; num2cell(Values)];
    xlswrite(fullPath, data_cell, 'KetQua');
    ParamHeader = {'ThongSo', 'GiaTri'; 'L', Res.inputs(1); 'm', Res.inputs(2);
        'h', Res.inputs(3); 'b', Res.inputs(4); 'E0', Res.inputs(5);
        'Ro', Res.inputs(6); 'Sig1', Res.inputs(7); 'Sig2', Res.inputs(8); 'Gamma',
Res.inputs(9)};
    xlswrite(fullPath, ParamHeader, 'ThongSoDauVao');
    msgbox(['Da luu file thanh cong: ' fullPath], 'Thong bao');
    catch err
        errordlg(['Loi xuat file: ' err.message], 'Loi');
    end
end
end
function Daodong_GUI
    clc; close all;
    % --- 1. KHOI TAO GIAO DIEN ---
    hFig = figure('Name', 'Daodong SFEM (Fixed & Excel Support)', ...
        'NumberTitle', 'off', ...
        'Units', 'normalized', ...
        'Position', [0.1 0.05 0.85 0.9], ...
        'Color', [0.94 0.94 0.94]);
    % --- Panel Input ---
    hPanel = uipanel('Parent', hFig, 'Title', 'THONG SO DAU VAO', ...
        'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
        'Position', [0.01 0.02 0.25 0.96]);
    % Cac tham so co ban
    add_param(hPanel, 1, 'Chieu dai nhip L(m):', '5', 'in_L1');
    add_param(hPanel, 2, 'So phan tu m:', '40', 'in_m');
    add_param(hPanel, 3, 'Chieu cao h(m):', '0.4', 'in_h');
    add_param(hPanel, 4, 'Be rong b(m):', '0.25', 'in_b');
    add_param(hPanel, 5, 'Modun E0(Pa):', '30e9', 'in_E0');
    add_param(hPanel, 6, 'Mat do ro(kg/m3):', '2400', 'in_ro');
    add_param(hPanel, 7, 'COV_E (sigma1):', '0.05', 'in_sig1');
    add_param(hPanel, 8, 'COV_Matdo (sigma2):', '0.05', 'in_sig2');
    add_param(hPanel, 9, 'Tuong quan Gama:', '1', 'in_gama');
    % Vector Ty le
    uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'text', 'String', 'Ty le dx/L1 (Vector):', ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.35 0.9 0.03], ...
        'HorizontalAlignment', 'left', 'FontWeight', 'bold', 'ForegroundColor', 'b');
    default_ratios = '[0.01, 0.03, 0.08, 0.2, 0.4, 1, 5, 15, 40, 100]';
    uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'edit', 'String', default_ratios, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.28 0.9 0.06], ...
        'Max', 2, 'Tag', 'in_ratios', 'BackgroundColor', 'white');
    % Nut TINH TOAN
    uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'pushbutton', 'String', 'TINH TOAN', ...

```

```

'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.15 0.9 0.10], ...
'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold', ...
'BackgroundColor', [0 0.5 0], 'ForegroundColor', 'white', ...
'Callback', @run_calculation);

% Nut XUAT EXCEL (MOI THEM)
hBtnExcel = uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'pushbutton', 'String', 'XUAT EXCEL', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.03 0.9 0.10], ...
    'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold', ...
    'BackgroundColor', [0.2 0.4 0.8], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Enable', 'off', ...
    'Callback', @export_excel_callback);

% --- Do thi (2 truc) ---
hAx1 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.33 0.58 0.63 0.38], 'Box', 'on');
grid on; title('Mode 1'); ylabel('COV Mode 1');
hAx2 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.33 0.08 0.63 0.38], 'Box', 'on');
grid on; title('Mode 2'); ylabel('COV Mode 2'); xlabel('Ty le \lambda / L_1');
% Luu handles
handles.Ax1 = hAx1; handles.Ax2 = hAx2;
handles.hBtnExcel = hBtnExcel;
guidata(hFig, handles);
% --- HAM HO TRO ---
function add_param(parent, idx, lbl, val, tag)
    y_pos = 0.92 - (idx-1)*0.06;
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'text', 'String', lbl, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos 0.9 0.025], ...
        'HorizontalAlignment', 'left');
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'edit', 'String', val, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos-0.035 0.9 0.035], ...
        'Tag', tag, 'BackgroundColor', 'white');
end
function run_calculation(hObject, ~)
    hFigMain = get(get(hObject, 'Parent'), 'Parent');
    myHandles = guidata(hFigMain);
    try
        set(hObject, 'String', 'Dang tinh...', 'Enable', 'off');
        set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'off');
        drawnow; pause(0.01);
        % 1. Input Data
        L1 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_L1'), 'String'));
        m = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_m'), 'String'));
        h = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_h'), 'String'));
        b = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_b'), 'String'));
        E0 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_E0'), 'String'));
        ro = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_ro'), 'String'));
        sigma1 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_sig1'), 'String'));
        sigma2 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_sig2'), 'String'));
        gama = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_gama'), 'String'));
        ratios_vec = str2num(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_ratios'), 'String'));
        if isempty(ratios_vec), error('Vector ty le loi!'); end
        % Derived params

```

```

L = L1/m;
I = 1/12*b*h^3;
m2 = 2*(m+1);
NW = 3;
dx = ratios_vec * L1;
% --- B1: MA TRAN PHAN TU & LAP RAP (Deterministic) ---
Ke = (E0*I/L^3) * [12, 6*L, -12, 6*L; 6*L, 4*L^2, -6*L, 2*L^2; -12, -6*L, 12, -6*L;
6*L, 2*L^2, -6*L, 4*L^2];
Me = (ro*b*h*L/420) * [156, 22*L, 54, -13*L; 22*L, 4*L^2, 13*L, -3*L^2; 54, 13*L,
156, -22*L; -13*L, -3*L^2, -22*L, 4*L^2];
K00 = zeros(m2); M00 = zeros(m2);
for e = 1:m
    dof = [2*e-1, 2*e, 2*e+1, 2*e+2];
    K00(dof,dof) = K00(dof,dof) + Ke;
    M00(dof,dof) = M00(dof,dof) + Me;
end
% Dieu kien bien (idx = [2:m2-2, m2])
idx = [2:m2-2, m2];
K00B = K00(idx,idx); M00B = M00(idx,idx);
% --- B2: GIAI BAI TOAN TRI RIENG ---
[phi, lamda] = eig(K00B, M00B);
TR = sort(diag(lamda));
TR = TR(1:3);
% Chuan hoa khoi luong
Phi = phi(:,1:3);
for i = 1:3
    Phi(:,i) = Phi(:,i)/sqrt(Phi(:,i)'*M00B*Phi(:,i));
end
Phi1C = Phi(:,1); Phi2C = Phi(:,2);
% --- B3: XAY DUNG DELTA MA TRAN
coefK = (E0) / (L^6);
d1 = coefK * [36*L^2, 24*L^3, -36*L^2, 12*L^3; 24*L^3, 16*L^4, -24*L^3, 8*L^4; -
36*L^2, -24*L^3, 36*L^2, -12*L^3; 12*L^3, 8*L^4, -12*L^3, 4*L^4];
d2 = coefK * [-144*L, -84*L^2, 144*L, -60*L^2; -84*L^2, -48*L^3, 84*L^2, -36*L^3;
144*L, 84*L^2, -144*L, 60*L^2; -60*L^2, -36*L^3, 60*L^2, -24*L^3];
d3 = coefK * [144, 72*L, -144, 72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2; -144, -72*L, 144, -
72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2];
DeltaKEi = zeros(m2, m2, m, NW);
for e = 1:m
    dof_ele = (2*e-1):(2*e+2);
    DeltaKEi(dof_ele, dof_ele, e, 1) = d1;
    DeltaKEi(dof_ele, dof_ele, e, 2) = d2;
    DeltaKEi(dof_ele, dof_ele, e, 3) = d3;
end
m1_mat = (ro)*[1 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0];
m2_mat = (ro)*[0 1 0 0; 1 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0];
m3 = (ro/L^2)*[-6, -2*L, 3, -L; -2*L, L^2, 0, 0; 3, 0, 0, 0; -L, 0, 0, 0];
m4 = (ro/L^3)*[4, -2*L, -2, L; -2*L, -4*L^2, 3*L, -L^2; -2, 3*L, 0, 0; L, -L^2, 0, 0];
m5 = (ro/L^4)*[9, 8*L, -9, 3*L; 8*L, 6*L^2, -8*L, 3*L^2; -9, -8*L, 9, -3*L; 3*L,
3*L^2, -3*L, L^2];

```

```

m6 = (ro/L^5)*[-12, -7*L, 12, -5*L; -7*L, -4*L^2, 7*L, -3*L^2; 12, 7*L, -12, 5*L; -5*L,
-3*L^2, 5*L, -2*L^2];
m7 = (ro/L^6)*[4, 2*L, -4, 2*L; 2*L, L^2, -2*L, L^2; -4, -2*L, 4, -2*L; 2*L, L^2, -2*L,
L^2];
DeltaMEi = zeros(m2, m2, m, 7);
for e = 1:m
    dof_ele = (2*e-1):(2*e+2);
    DeltaMEi(dof_ele, dof_ele, e, :) = cat(3, m1_mat, m2_mat, m3, m4, m5, m6, m7);
end
n_dof = length(idx);
DeltaKiB = zeros(n_dof, n_dof, m, NW);
DeltaMiB = zeros(n_dof, n_dof, m, 7);
for e = 1:m
    for i = 1:NW, DeltaKiB(:, :, e, i) = DeltaKEi(idx, idx, e, i); end
    for i = 1:7, DeltaMiB(:, :, e, i) = DeltaMEi(idx, idx, e, i); end
end
A1 = zeros(m, NW); A2 = zeros(m, NW);
B1 = zeros(m, 7); B2 = zeros(m, 7);
for e = 1:m
    for i = 1:NW
        A1(e,i) = Phi1C' * (DeltaKiB(:, :, e, i) * Phi1C);
        A2(e,i) = Phi2C' * (DeltaKiB(:, :, e, i) * Phi2C);
    end
    for j = 1:7
        B1(e,j) = (-TR(1)) * (Phi1C' * (DeltaMiB(:, :, e, j) * Phi1C));
        B2(e,j) = (-TR(2)) * (Phi2C' * (DeltaMiB(:, :, e, j) * Phi2C));
    end
end
xg5 = [-0.906179845938664, -0.538469310105683, 0, ...
0.538469310105683, 0.906179845938664];
wg5 = [0.236926885056189, 0.478628670499366, ...
0.568888888888889, 0.478628670499366, 0.236926885056189];
COV1_T = zeros(1, length(dx));
COV2_T = zeros(1, length(dx));
[X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2] = ndgrid(xg5, xg5, xg5, xg5, xg5, xg5);
[W1, W2, W3, W4, W5, W6] = ndgrid(wg5, wg5, wg5, wg5, wg5, wg5);
Wprod = W1.*W2.*W3.*W4.*W5.*W6;
Const_Int = (b^2*h^2*L^2/64) * Wprod;
for ii = 1:length(dx)
    set(hObject, 'String', sprintf('Dang tinh %d/%d...', ii, length(dx))); drawnow;
    curr_dx = dx(ii); dy = curr_dx; dz = curr_dx;
    EXi1Xi2T = zeros(NW, NW, m, m);
    EYi1Yi2T = zeros(7, 7, m, m);
    EXi1Yi2T = zeros(3, 7, m, m);
    for e1 = 1:m
        for e2 = 1:m
            Delta = L*(e2-e1);
            % 1. Truong E
            Rff = sigma1^2 * exp(-abs(((L/2)*(X2-X1)+Delta)/curr_dx) -abs((h/2*(Y2-
Y1))/dy) -abs((b/2*(Z2-Z1))/dz));
            Common = Rff .* Const_Int;

```



```

        for i1 = 1:NW, for i2 = 1:NW
            f = ((L/2)*X1+L/2).^(i1-1) .* ((L/2)*X2+L/2).^(i2-1) .* (h/2*Y1).^2 .*
(h/2*Y2).^2 .* Common;
            EXi1Xi2T(i1,i2,e1,e2) = sum(f(:));
        end, end
        % 2. Truong ro
        Rgg = sigma2^2 * exp(-abs(((L/2)*(X2-X1)+Delta)/curr_dx) -abs((h/2*(Y2-
Y1))/dy) -abs((b/2*(Z2-Z1))/dz));
        CommonG = Rgg .* Const_Int;
        for i1 = 1:7, for i2 = 1:7
            f = ((L/2)*X1+L/2).^(i1-1) .* ((L/2)*X2+L/2).^(i2-1) .* CommonG;
            EYi1Yi2T(i1,i2,e1,e2) = sum(f(:));
        end, end
        % 3. Tuong quan cheo
        Rfg = gama * sigma2^2 * exp(-abs(((L/2)*(X2-X1)+Delta)/curr_dx) -
abs((h/2*(Y2-Y1))/dy) -abs((b/2*(Z2-Z1))/dz));
        CommonFG = Rfg .* Const_Int;
        for i1 = 1:3, for i2 = 1:7
            f = ((L/2)*X1+L/2).^(i1-1) .* ((L/2)*X2+L/2).^(i2-1) .* (h/2*Y1).^2 .*
CommonFG;
            EXi1Yi2T(i1,i2,e1,e2) = sum(f(:));
        end, end
    end
end
end
Var1 = 0; Var2 = 0;
% Mode 1
V11=0; for i1=1:NW, for i2=1:NW, V11=V11 +
A1(:,i1)*squeeze(EXi1Xi2T(i1,i2,:))*A1(:,i2); end, end
V12=0; for i1=1:7, for i2=1:7, V12=V12 +
B1(:,i1)*squeeze(EYi1Yi2T(i1,i2,:))*B1(:,i2); end, end
V13=0; for i1=1:NW, for i2=1:7, V13=V13 +
A1(:,i1)*squeeze(EXi1Yi2T(i1,i2,:))*B1(:,i2); end, end
Var1 = V11 + V12 + 2*V13;
% Mode 2
V21=0; for i1=1:NW, for i2=1:NW, V21=V21 +
A2(:,i1)*squeeze(EXi1Xi2T(i1,i2,:))*A2(:,i2); end, end
V22=0; for i1=1:7, for i2=1:7, V22=V22 +
B2(:,i1)*squeeze(EYi1Yi2T(i1,i2,:))*B2(:,i2); end, end
V23=0; for i1=1:NW, for i2=1:7, V23=V23 +
A2(:,i1)*squeeze(EXi1Yi2T(i1,i2,:))*B2(:,i2); end, end
Var2 = V21 + V22 + 2*V23;
COV1_T(ii) = sqrt(Var1) / TR(1);
COV2_T(ii) = sqrt(Var2) / TR(2);
end
% --- B6: VE DO THI & XUAT KET QUA ---
% Do thi 1
axes(myHandles.Ax1); cla;
semilogx(ratios_vec, COV1_T, '-bs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'b',
'MarkerSize', 6);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('Mode 1'); ylabel('COV Mode 1');

```

```

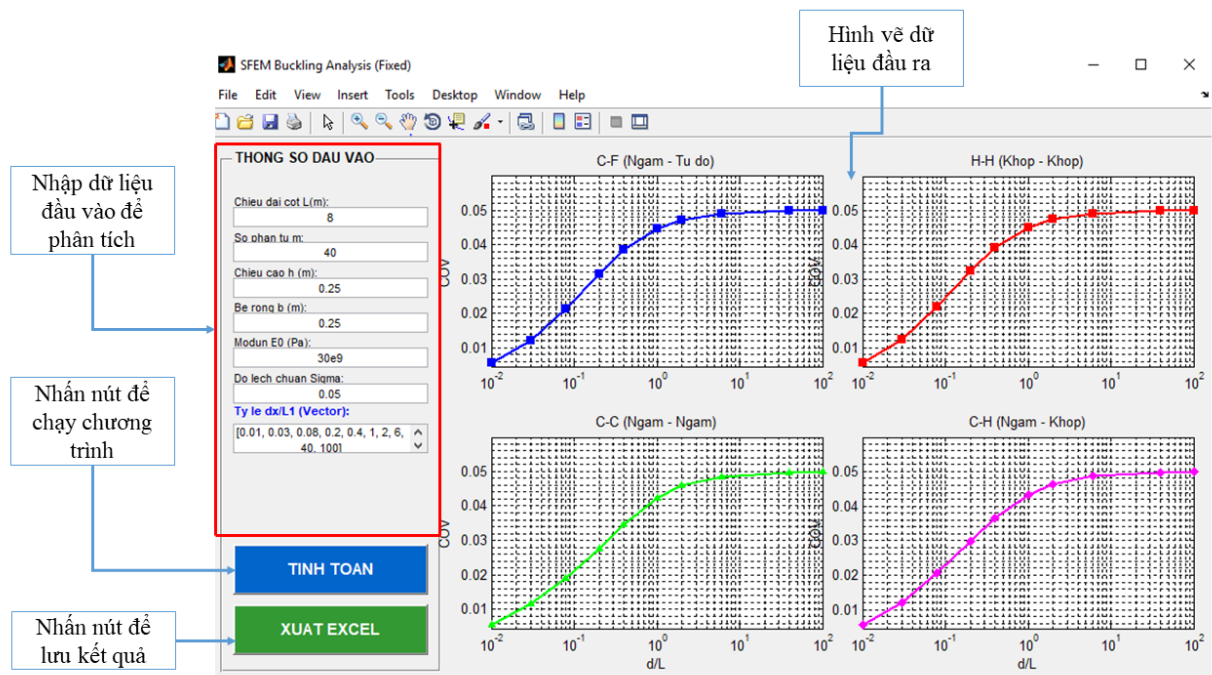
% Scale Y axis 1
y1min=min(COV1_T)*0.8; y1max=max(COV1_T)*1.2;
if y1max>y1min, ylim([y1min y1max]); end
% Do thi 2
axes(myHandles.Ax2); cla;
semilogx(ratios_vec, COV2_T, '-rs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'r',
'MarkerSize', 6);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('Mode 2'); ylabel('COV Mode 2'); xlabel('Ty le \lambda / L_1');
% Scale Y axis 2
y2min=min(COV2_T)*0.8; y2max=max(COV2_T)*1.2;
if y2max>y2min, ylim([y2min y2max]); end
set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on');
% --- LUU DU LIEU DE XUAT EXCEL ---
Res.ratios = ratios_vec; Res.dx = dx;
Res.COV1 = COV1_T; Res.COV2 = COV2_T;
Res.inputs = [L1, m, h, b, E0, ro, sigma1, sigma2, gama];
myHandles.Results = Res;
guidata(hFigMain, myHandles);
set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'on');
msgbox('Hoan tat! Bam nut XUAT EXCEL de luu ket qua.', 'Thong bao');
catch err
    set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on');
    errorldg(err.message, 'Loi Chuong Trinh');
end
end
% --- 2. EXCEL EXPORT CALLBACK ---
function export_excel_callback(~, ~)
    data = guidata(gcf);
    if ~isfield(data, 'Results'), errorldg('Khong co du lieu!', 'Loi'); return; end
    Res = data.Results;
    [file, path] = uiputfile('*.xls', 'Luu ket qua SFEM');
    if isequal(file, 0), return; end
    fullPath = fullfile(path, file);
    try
        if exist(fullPath, 'file')
            fid = fopen(fullPath, 'a');
            if fid == -1, errorldg('File dang mo! Hay dong file Excel lai.', 'Loi'); return; end
            fclose(fid);
        end
        Header = {'Ty_le_d_L', 'dx_m', 'COV_Mode1', 'COV_Mode2'};
        Values = [Res.ratios(:), Res.dx(:), Res.COV1(:), Res.COV2(:)];
        data_cell = [Header; num2cell(Values)];
        xlswrite(fullPath, data_cell, 'KetQua');
        ParamHeader = {'ThongSo', 'GiaTri'; 'L', Res.inputs(1); 'm', Res.inputs(2);
            'h', Res.inputs(3); 'b', Res.inputs(4); 'E0', Res.inputs(5);
            'Ro', Res.inputs(6); 'Sig1', Res.inputs(7); 'Sig2', Res.inputs(8); 'Gamma',
Res.inputs(9)};
        xlswrite(fullPath, ParamHeader, 'ThongSoDauVao');
        msgbox(['Da luu file thanh cong: ' fullPath], 'Thong bao');
    catch err

```

```

errorlog(['Loi xuat file: ' err.message], 'Loi');
end
end
end

```



Hình E.3. Giao diện người dùng chương trình tính bài toán ổn định

C.1. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình được thiết kế với giao diện người dùng đồ họa (GUI) trong môi trường MATLAB. Trình tự thao tác như sau:

1. **Khởi tạo:** Mở phần mềm MATLAB. Sao chép toàn bộ mã nguồn tại mục C.4 vào một kịch bản (script) mới, lưu tên tệp là SFEM_Buckling_GUI.m.
2. **Kích hoạt giao diện:** Trong Command Window của MATLAB, gõ lệnh SFEM_Buckling_GUI và nhấn Enter để gọi giao diện làm việc.
3. **Nhập liệu vật lý:** Tại Panel "**THÔNG SỐ ĐẦU VÀO**", lần lượt nhập các đặc trưng về hình học và vật liệu Nhập mức độ phân tán (COV) của trường ngẫu nhiên Mô đun đàn hồi.
4. **Phân tích Lực tới hạn:** Nhấn nút "**TÍNH TOÁN**".
5. **Đánh giá kết quả:** Hệ thống sẽ kết xuất tự động 4 đồ thị riêng biệt ở phần viền phải giao diện, biểu thị sự biến thiên của Hệ số biến thiên (COV) Lực tới hạn tương ứng với 4 điều kiện biên theo sự thay đổi của tỷ số chiều dài tương quan
6. **Lưu trữ:** Nhấn nút "**XUẤT EXCEL**" để tải về các tệp dữ liệu số liệu chi tiết.

C.2. Tệp dữ liệu đầu vào (Input Data)

Các tham số đầu vào được nhập qua giao diện, bao gồm:

- **Chiều dài cột L(m):** Chiều dài danh nghĩa cột (Ví dụ: 8).
- **Số phân tử m:** Số lượng phần tử hữu hạn dọc trục (Ví dụ: 40).
- **Chiều cao h (m):** Kích thước chiều cao mặt cắt (Ví dụ: 0.25).

- **Be rong b (m):** Kích thước bề rộng mặt cắt (Ví dụ: 0.3).
- **Modun E_0 (Pa):** Kỳ vọng mô đun đàn hồi (Ví dụ: 30e9).
- **Do lech chuan Sigma:** Hệ số biến thiên của trường Mô đun đàn hồi (Ví dụ: 0.05).
- **Ty le dx/L (Vector):** Mảng tỷ lệ chiều dài tương quan để quét phân tích độ nhạy (Ví dụ: [0.01, 0.03, 0.08, 0.2, 0.4, 1, 2, 6, 40, 100]).

C.3. Tập dữ liệu đầu ra (Output Data)

Cơ sở dữ liệu sau khi được phân tích sẽ trích xuất ra tập Excel bao gồm 2 trang tính (Sheets):

- **Sheet "KetQua":** Chứa 6 cột cấu trúc số liệu chính:
 - *Ty_le_d_L*: Tỷ số d/L
 - *dx_m*: Chiều dài tương quan dọc trục tuyệt đối (tính bằng mét).
 - *COV_CF*: COV của lực tới hạn đối với cấu kiện Ngàm - Tự do.
 - *COV_HH*: COV của lực tới hạn đối với cấu kiện Khớp - Khớp.
 - *COV_CC*: COV của lực tới hạn đối với cấu kiện Ngàm – Ngàm.
 - *COV_CH*: COV của lực tới hạn đối với cấu kiện Ngàm - Khớp.
- **Sheet "ThongSoDauVao":** Lưu trữ lại toàn bộ các thông số thiết lập đầu vào để phục vụ mục đích truy xuất, kiểm tra lại điều kiện mô phỏng.

C.4. Bản in câu lệnh chương trình (Source Code)

```
function SFEM_Buckling_GUI
clc; close all;
% --- 1. KHOI TAO GIAO DIEN ---
hFig = figure('Name', 'SFEM Buckling Analysis (Fixed)', ...
    'NumberTitle', 'off', ...
    'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.05 0.05 0.9 0.85], ...
    'Color', [0.94 0.94 0.94]);
% --- Panel Input ---
hPanel = uipanel('Parent', hFig, 'Title', 'THONG SO DAU VAO', ...
    'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
    'Position', [0.01 0.02 0.22 0.96]);
add_param(hPanel, 1, 'Chieu dai cot L(m):', '6', 'in_L1');
add_param(hPanel, 2, 'So phan tu m:', '20', 'in_m');
add_param(hPanel, 3, 'Chieu cao h (m):', '0.3', 'in_h');
add_param(hPanel, 4, 'Be rong b (m):', '0.3', 'in_b');
add_param(hPanel, 5, 'Modun E0 (Pa):', '30e9', 'in_E0');
add_param(hPanel, 6, 'Do lech chuan Sigma:', '0.05', 'in_sigma');
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'text', 'String', 'Ty le dx/L1 (Vector):', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.50 0.9 0.03], ...
    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontWeight', 'bold', 'ForegroundColor', 'b');
default_ratios = [0.01, 0.03, 0.08, 0.2, 0.4, 1, 2, 6, 40, 100];
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'edit', 'String', default_ratios, ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.43 0.9 0.06], ...
    'Max', 2, 'Tag', 'in_ratios', 'BackgroundColor', 'white');
```

```

% Nut TINH TOAN
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'pushbutton', 'String', 'TINH TOAN', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.15 0.9 0.10], ...
    'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
    'BackgroundColor', [0 0.4 0.8], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Callback', @run_calculation);

% Nut XUAT EXCEL
hBtnExcel = uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'pushbutton', 'String', 'XUAT EXCEL',
...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.03 0.9 0.10], ...
    'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
    'BackgroundColor', [0.2 0.6 0.2], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Enable', 'off', ...
    'Callback', @export_excel_callback);

% --- Khu vuc Do thi (2x2) ---
hAx1 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.28 0.58 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('C-F (Ngam - Tu do)'); ylabel('COV');
hAx2 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.65 0.58 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('H-H (Khop - Khop)'); ylabel('COV');
hAx3 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.28 0.10 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('C-C (Ngam - Ngam)'); ylabel('COV'); xlabel('Ty le \lambda / L_1');
hAx4 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.65 0.10 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('C-H (Ngam - Khop)'); ylabel('COV'); xlabel('Ty le \lambda / L_1');
% Luu handles
myHandles.Ax1 = hAx1; myHandles.Ax2 = hAx2; myHandles.Ax3 = hAx3;
myHandles.Ax4 = hAx4;
myHandles.hBtnExcel = hBtnExcel;
guidata(hFig, myHandles);
% --- HAM CON ---
function add_param(parent, idx, lbl, val, tag)
    y_pos = 0.92 - (idx-1)*0.07;
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'text', 'String', lbl, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos 0.9 0.025], ...
        'HorizontalAlignment', 'left');
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'edit', 'String', val, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos-0.04 0.9 0.04], ...
        'Tag', tag, 'BackgroundColor', 'white');
end
% --- 1. MAIN CALCULATION CALLBACK ---
function run_calculation(hObject, ~)
    hFigMain = get(get(hObject, 'Parent'), 'Parent');
    myHandles = guidata(hFigMain);
    try
        set(hObject, 'String', 'Dang tinh...', 'Enable', 'off');

```

```

set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'off');
drawnow;
% 1. Input
L1 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_L1'), 'String'));
m = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_m'), 'String'));
h = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_h'), 'String'));
b = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_b'), 'String'));
E0 = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_E0'), 'String'));
sigma = str2double(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_sigma'), 'String'));
ratios_vec = str2num(get(findobj(hFigMain, 'Tag', 'in_ratios'), 'String'));
if isempty(ratios_vec), error('Vector ty le loi!'); end
L = L1/m; I = 1/12*b*h^3; m2 = 2*(m+1); NW = 3; dx = ratios_vec * L1;
% 2. FEM Setup (Stiffness & Geometric Stiffness)
ke_ref = [12/L^3, 6/L^2, -12/L^3, 6/L^2; 6/L^2, 4/L, -6/L^2, 2/L; -12/L^3, -
6/L^2, 12/L^3, -6/L^2; 6/L^2, 2/L, -6/L^2, 4/L];
k0p_ref = [6/(5*L), 1/10, -6/(5*L), 1/10; 1/10, 2*L/15, -1/10, -L/30; -6/(5*L), -
1/10, 6/(5*L), -1/10; 1/10, -L/30, -1/10, 2*L/15];

K00 = zeros(m2); K00P = zeros(m2);
for e = 1:m
    id = (2*e-1):(2*e+2);
    K00(id,id) = K00(id,id) + E0*I * ke_ref;
    K00P(id,id) = K00P(id,id) + k0p_ref;
end
% 3. Eig Solve for 4 Boundary Conditions using robust built-in eig
idxCF = 3:m2;
[TRFEM1, Phi1C1] = solve_buckling(K00(idxCF,idxCF), K00P(idxCF,idxCF),
m2, idxCF);
idxHH = [2:m2-2, m2];
[TRFEM2, Phi1C2] = solve_buckling(K00(idxHH,idxHH), K00P(idxHH,idxHH),
m2, idxHH);
idxCC = 3:m2-2;
[TRFEM3, Phi1C3] = solve_buckling(K00(idxCC,idxCC), K00P(idxCC,idxCC),
m2, idxCC);
idxCH = [3:m2-2, m2];
[TRFEM4, Phi1C4] = solve_buckling(K00(idxCH,idxCH), K00P(idxCH,idxCH),
m2, idxCH);
% 4. SFEM Matrix Prep
coefK = (E0 * b) / (L^6);
d1 = coefK * [ 36*L^2, 24*L^3, -36*L^2, 12*L^3; 24*L^3, 16*L^4, -24*L^3,
8*L^4; -36*L^2, -24*L^3, 36*L^2, -12*L^3; 12*L^3, 8*L^4, -12*L^3, 4*L^4 ];
d2 = coefK * [-144*L, -84*L^2, 144*L, -60*L^2; -84*L^2, -48*L^3, 84*L^2, -
36*L^3; 144*L, 84*L^2, -144*L, 60*L^2; -60*L^2, -36*L^3, 60*L^2, -24*L^3];
d3 = coefK * [144, 72*L, -144, 72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2; -144, -
72*L, 144, -72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2];
DeltaEi = zeros(m2, m2, m, NW);

```

```

    for e = 1:m, id = (2*e-1):(2*e+2); DeltaEi(id,id,e,1)=d1; DeltaEi(id,id,e,2)=d2;
DeltaEi(id,id,e,3)=d3; end
    % 5. Pre-calc A matrices
    A1 = zeros(m, NW); A2 = zeros(m, NW); A3 = zeros(m, NW); A4 = zeros(m,
NW);
    for e = 1:m
        for i = 1:NW
            A1(e,i) = Phi1C1' * (DeltaEi(:, :, e, i) * Phi1C1);
            A2(e,i) = Phi1C2' * (DeltaEi(:, :, e, i) * Phi1C2);
            A3(e,i) = Phi1C3' * (DeltaEi(:, :, e, i) * Phi1C3);
            A4(e,i) = Phi1C4' * (DeltaEi(:, :, e, i) * Phi1C4);
        end
    end
    gp10 = [-0.9739065285171717, -0.8650633666889845, -0.6794095682990244, ...
-0.4333953941292472, -0.1488743389816312, 0.1488743389816312, ...
0.4333953941292472, 0.6794095682990244, 0.8650633666889845, ...
0.9739065285171717];
    w10 = [0.0666713443086881, 0.1494513491505806, 0.2190863625159820, ...
0.2692667193099963, 0.2955242247147529, 0.2955242247147529, ...
0.2692667193099963, 0.2190863625159820, 0.1494513491505806, ...
0.0666713443086881];
    [GX1, GX2, GY1, GY2] = ndgrid(gp10, gp10, gp10, gp10);
    [WX1, WX2, WY1, WY2] = ndgrid(w10, w10, w10, w10);
    W4D_vec = WX1(:).*WX2(:).*WY1(:).*WY2(:);
    Lx2=L/2; hx2=h/2; fac=(h^2/4)*(L^2/4);
    X1phys=Lx2*GX1+Lx2; X2phys=Lx2*GX2+Lx2; Y1_sq=(hx2*GY1).^2;
Y2_sq=(hx2*GY2).^2;
    X1pow = zeros([size(X1phys), NW]); X2pow = zeros([size(X2phys), NW]);
    for p=0:NW-1, X1pow(:, :, :, p+1)=X1phys.^p; X2pow(:, :, :, p+1)=X2phys.^p;
end
    COV1=zeros(1,length(dx)); COV2=zeros(1,length(dx));
COV3=zeros(1,length(dx)); COV4=zeros(1,length(dx));
    nR=2*m-1; rVals=-(m-1):(m-1);
    for tt = 1:length(dx)
        set(hObject, 'String', sprintf('Dang tinh %d/%d...', tt, length(dx))); drawnow;
        curr_dx = dx(tt);
        dy = 0.01 * L;
        val_EX_r = zeros(NW, NW, nR);
        for ir = 1:nR
            Deltae = L * rVals(ir);
            Rff = (sigma^2) * exp(-abs((Lx2*(GX2-GX1)+Deltae)/curr_dx)) .* exp(-
abs((hx2*(GY2-GY1))/dy));
            for i1=1:NW
                for i2=1:NW
                    fval = fac .* X1pow(:, :, :, i1) .* X2pow(:, :, :, i2) .* Y1_sq .* Y2_sq .*
Rff;
                    val_EX_r(i1,i2,ir) = sum(fval(:).*W4D_vec);

```

```

        end
    end
end
EXi1Xi2T = zeros(NW, NW, m, m);
for e1=1:m, for e2=1:m, EXi1Xi2T(:,:,e1,e2) = val_EX_r(:,:,e2-e1)+m); end,
end

Var1=0; Var2=0; Var3=0; Var4=0;
for i1=1:NW, for i2=1:NW
    EX_mat = squeeze(EXi1Xi2T(i1,i2,:,:));
    Var1 = Var1 + A1(:,i1)'*EX_mat*A1(:,i2);
    Var2 = Var2 + A2(:,i1)'*EX_mat*A2(:,i2);
    Var3 = Var3 + A3(:,i1)'*EX_mat*A3(:,i2);
    Var4 = Var4 + A4(:,i1)'*EX_mat*A4(:,i2);
end, end
COV1(tt) = sqrt(max(0,Var1))/TRFEM1; COV2(tt) =
sqrt(max(0,Var2))/TRFEM2;
COV3(tt) = sqrt(max(0,Var3))/TRFEM3; COV4(tt) =
sqrt(max(0,Var4))/TRFEM4;
end
% 8. PLOT
axes(myHandles.Ax1); cla;
semilogx(ratios_vec, COV1, '-bs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'b',
'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('C-F (Ngam - Tu do)'); ylabel('COV');
if max(COV1)>0, ylim([min(COV1)*0.8, max(COV1)*1.2]); end
axes(myHandles.Ax2); cla;
semilogx(ratios_vec, COV2, '-rs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'r',
'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('H-H (Khop - Khop)'); ylabel('COV');
if max(COV2)>0, ylim([min(COV2)*0.8, max(COV2)*1.2]); end
axes(myHandles.Ax3); cla;
semilogx(ratios_vec, COV3, '-g^', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'g',
'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('C-C (Ngam - Ngam)'); ylabel('COV'); xlabel('d/L');
if max(COV3)>0, ylim([min(COV3)*0.8, max(COV3)*1.2]); end
axes(myHandles.Ax4); cla;
semilogx(ratios_vec, COV4, '-md', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'm',
'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('C-H (Ngam - Khop)'); ylabel('COV'); xlabel('d/L');
if max(COV4)>0, ylim([min(COV4)*0.8, max(COV4)*1.2]); end
set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on');
% --- LUU DU LIEU VAO HANDLES DE XUAT EXCEL ---
Res.ratios = ratios_vec; Res.dx = dx;

```



```

Res.COV1 = COV1; Res.COV2 = COV2; Res.COV3 = COV3; Res.COV4 =
COV4;
Res.inputs = [L1, m, h, b, E0, sigma];
myHandles.Results = Res;
guidata(hFigMain, myHandles);
set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'on');
msgbox('Tinh toan xong! Hay bam nut XUAT EXCEL de luu ket qua.', 'Thong
bao');
catch err
    set(hObject, 'String', 'TINH TOAN', 'Enable', 'on'); errorldg(err.message, 'Loi
Chuong Trinh');
end
end
% --- 2. EXCEL EXPORT CALLBACK ---
function export_excel_callback(~, ~)
    data = guidata(gcf);
    if ~isfield(data, 'Results'), errorldg('Khong co du lieu!', 'Loi'); return; end
    Res = data.Results;

    [file, path] = uiputfile('*.xls', 'Luu ket qua Buckling');
    if isequal(file, 0), return; end
    fullPath = fullfile(path, file);
    try
        if exist(fullPath, 'file')
            fid = fopen(fullPath, 'a');
            if fid == -1, errorldg('File dang mo! Hay dong file Excel lai.', 'Loi'); return; end
            fclose(fid);
        end
        Header = {'Ty_le_d_L', 'dx_m', 'COV_CF', 'COV_HH', 'COV_CC', 'COV_CH'};
        Values = [Res.ratios(:), Res.dx(:), Res.COV1(:), Res.COV2(:), Res.COV3(:),
Res.COV4(:)];
        data_cell = [Header; num2cell(Values)];
        xlswrite(fullPath, data_cell, 'KetQua');
        ParamHeader = {'ThongSo', 'GiaTri'; 'L', Res.inputs(1); 'm', Res.inputs(2);
            'h', Res.inputs(3); 'b', Res.inputs(4); 'E0', Res.inputs(5); 'Sigma',
Res.inputs(6)};
        xlswrite(fullPath, ParamHeader, 'ThongSoDauVao');
        msgbox(['Da luu file thanh cong: ' fullPath], 'Thong bao');
    catch err
        errorldg(['Loi xuất file: ' err.message], 'Loi');
    end
end
% --- 3. ROBUST BUCKLING SOLVER ---
function [TR, Phi_full] = solve_buckling(K_sub, KP_sub, full_size, indices)
    % Goi ham eig truc tiep cua MATLAB, tra ve Vector (V) va Gia tri rieng (D)
    [V, D] = eig(K_sub, KP_sub);
    % Trich xuất các giá trị riêng và sắp xếp tăng dần

```

```

lambdas = diag(D);
[lambdas_sorted, sort_idx] = sort(lambdas);
% Gia tri rieng nho nhat chinh la Tai trong toi han (Buckling Load)
TR = lambdas_sorted(1);
% Vector rieng tuong ung voi TR
phi_part = V(:, sort_idx(1));

a = sqrt(phi_part' * KP_sub * phi_part);
phi_part = phi_part / a;
% Ghep vao vector kich thuoc day du
Phi_full = zeros(full_size, 1);
Phi_full(indices) = phi_part;
end
end
function SFEM_Buckling_GUI
clc; close all;
% --- 1. KHOI TAO GIAO DIEN ---
hFig = figure('Name', 'SFEM Buckling 3D Optimized (Robust & 10-Point Gauss)', ...
    'NumberTitle', 'off', ...
    'Units', 'normalized', ...
    'Position', [0.05 0.05 0.9 0.9], ...
    'Color', [0.94 0.94 0.94]);
% --- Panel Input (Ben trai) ---
hPanel = uipanel('Parent', hFig, 'Title', 'THONG SO DAU VAO', ...
    'FontSize', 10, 'FontWeight', 'bold', ...
    'Position', [0.01 0.02 0.22 0.96]);
% Cac truong nhap lieu
add_input(hPanel, 'Chieu dai cot L (m):', '5', 'in_L1', 0.92);
add_input(hPanel, 'Be rong b (m):', '0.25', 'in_b', 0.84);
add_input(hPanel, 'Chieu cao h (m):', '0.4', 'in_h', 0.76);
add_input(hPanel, 'Modun E0 (Pa):', '30e9', 'in_E0', 0.68);
add_input(hPanel, 'He so bien dong Sigma:', '0.05', 'in_sigma', 0.60);
add_input(hPanel, 'So phan tu m:', '20', 'in_m', 0.52);
add_input(hPanel, 'So hang tu (NW):', '3', 'in_nw', 0.44);
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'text', 'String', 'Ty le d/L (Vector):', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.35 0.9 0.03], ...
    'HorizontalAlignment', 'left', 'FontWeight', 'bold');
default_ratios = [0.01, 0.03, 0.08, 0.2, 0.4, 1, 2, 6, 40, 100];
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'edit', ...
    'String', default_ratios, ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.28 0.9 0.06], ...
    'Max', 2, 'Tag', 'in_ratios', 'BackgroundColor', 'white');
% Nut Bam CHAY TINH TOAN
uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'pushbutton', 'String', 'CHAY TINH TOAN', ...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.15 0.9 0.10], ...
    'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
    'BackgroundColor', [0 0.4 0.8], 'ForegroundColor', 'white', ...

```

```

        'Callback', @run_optimization);
% Nut Bam XUAT EXCEL
hBtnExcel = uicontrol('Parent', hPanel, 'Style', 'pushbutton', 'String', 'XUAT EXCEL',
...
    'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 0.03 0.9 0.10], ...
    'FontSize', 11, 'FontWeight', 'bold', ...
    'BackgroundColor', [0.2 0.6 0.2], 'ForegroundColor', 'white', ...
    'Enable', 'off', ...
    'Callback', @export_excel_callback);
% --- Khu vuc Do thi (Ben phai - Luoi 2x2) ---
hAx1 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.28 0.58 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('Case 1: C-F (Ngam - Tu do)'); ylabel('COV');
hAx2 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.65 0.58 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('Case 2: H-H (Khop - Khop)'); ylabel('COV');
hAx3 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.28 0.10 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('Case 3: C-C (Ngam - Ngam)'); ylabel('COV'); xlabel('Ty le \lambda =
d_x/L');
hAx4 = axes('Parent', hFig, 'Units', 'normalized', 'Position', [0.65 0.10 0.33 0.35], 'Box',
'on');
grid on; title('Case 4: C-H (Ngam - Khop)'); ylabel('COV'); xlabel('Ty le \lambda =
d_x/L');
% Luu handles
handles.Ax1 = hAx1; handles.Ax2 = hAx2; handles.Ax3 = hAx3; handles.Ax4 =
hAx4;
handles.hBtnExcel = hBtnExcel;
guidata(hFig, handles);

% --- HAM CON TAO INPUT ---
function add_input(parent, label, val, tag, y_pos)
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'text', 'String', label, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos 0.9 0.025], ...
        'HorizontalAlignment', 'left');
    uicontrol('Parent', parent, 'Style', 'edit', 'String', val, ...
        'Units', 'normalized', 'Position', [0.05 y_pos-0.035 0.9 0.035], ...
        'Tag', tag, 'BackgroundColor', 'white');
end
function run_optimization(hObject, ~)
    hMain = get(hObject, 'Parent', 'Parent');
    myHandles = guidata(hMain);
    try
        set(hObject, 'String', 'Dang tinh...', 'Enable', 'off');
        set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'off');
        pause(0.01);
        % 1. Lay du lieu

```

```

L1 = str2double(get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_L1'), 'String'));
b = str2double(get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_b'), 'String'));
h = str2double(get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_h'), 'String'));
E0 = str2double(get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_E0'), 'String'));
sigma = str2double(get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_sigma'), 'String'));
m = str2double(get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_m'), 'String'));
NW = str2double(get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_nw'), 'String'));
ratio_str = get(findobj(hMain, 'Tag', 'in_ratios'), 'String');
ratios = str2num(ratio_str); %#ok<ST2NM>
if isempty(ratios), error('Vector ty le loi'); end
dz = ratios * L1;
% 2. Khoi tao
I = 1/12 * b * h^3;
L = L1 / m;
m2 = 2*(m+1);
% --- Templates (Local Matrices) ---
Ke_local = [12, 6*L, -12, 6*L; 6*L, 4*L^2, -6*L, 2*L^2; -12, -6*L, 12, -6*L;
6*L, 2*L^2, -6*L, 4*L^2];
Ke_local = (E0*I/L^3) * Ke_local;
Kp_local = [6/(5*L), 1/10, -6/(5*L), 1/10; 1/10, 2*L/15, -1/10, -L/30; -6/(5*L), -
1/10, 6/(5*L), -1/10; 1/10, -L/30, -1/10, 2*L/15];
Delta_local = zeros(4,4,NW);
Delta_local(:, :, 1) = (E0/L^6)*[36*L^2, 24*L^3, -36*L^2, 12*L^3; 24*L^3,
16*L^4, -24*L^3, 8*L^4; -36*L^2, -24*L^3, 36*L^2, -12*L^3; 12*L^3, 8*L^4, -
12*L^3, 4*L^4];
Delta_local(:, :, 2) = (E0/L^6)*[-144*L, -84*L^2, 144*L, -60*L^2; -84*L^2, -
48*L^3, 84*L^2, -36*L^3; 144*L, 84*L^2, -144*L, 60*L^2; -60*L^2, -36*L^3,
60*L^2, -24*L^3];
Delta_local(:, :, 3) = (E0/L^6)*[144, 72*L, -144, 72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L,
36*L^2; -144, -72*L, 144, -72*L; 72*L, 36*L^2, -72*L, 36*L^2];
% --- Lap ghep toan cuc ---
K00 = zeros(m2,m2); K00P = zeros(m2,m2);
for e = 1:m
    idx = (2*e-1):(2*e+2);
    K00(idx,idx) = K00(idx,idx) + Ke_local;
    K00P(idx,idx) = K00P(idx,idx) + Kp_local;
end
% --- Xu ly bien (4 Cases bang solve_buckling) ---
idxCF = 3:m2;
[TR1, Phi1] = solve_buckling(K00(idxCF,idxCF), K00P(idxCF,idxCF), m2,
idxCF);
idxHH = [2:m2-2, m2];
[TR2, Phi2] = solve_buckling(K00(idxHH,idxHH), K00P(idxHH,idxHH), m2,
idxHH);
idxCC = 3:m2-2;
[TR3, Phi3] = solve_buckling(K00(idxCC,idxCC), K00P(idxCC,idxCC), m2,
idxCC);

```

```

idxCH = [3:m2-2, m2];
[TR4, Phi4] = solve_buckling(K00(idxCH,idxCH), K00P(idxCH,idxCH), m2,
idxCH);

% --- Delta Global Assembly ---
DeltaEi = zeros(m2, m2, m, NW);
for e = 1:m
    idx = (2*e-1):(2*e+2);
    for i = 1:NW, DeltaEi(idx, idx, e, i) = Delta_local(:, :, i); end
end
% Precompute scalars s = phi'*Delta*phi (Sensitivity Analysis)
s1 = zeros(m, NW); s2 = zeros(m, NW); s3 = zeros(m, NW); s4 = zeros(m, NW);
for e = 1:m
    for i = 1:NW
        s1(e,i) = Phi1' * DeltaEi(:, :, e, i) * Phi1;
        s2(e,i) = Phi2' * DeltaEi(:, :, e, i) * Phi2;
        s3(e,i) = Phi3' * DeltaEi(:, :, e, i) * Phi3;
        s4(e,i) = Phi4' * DeltaEi(:, :, e, i) * Phi4;
    end
end
gp10 = [-0.9739065285171717, -0.8650633666889845, -0.6794095682990244, ...
        -0.4333953941292472, -0.1488743389816312, 0.1488743389816312, ...
        0.4333953941292472, 0.6794095682990244, 0.8650633666889845, ...
        0.9739065285171717];
w10 = [0.0666713443086881, 0.1494513491505806, 0.2190863625159820, ...
        0.2692667193099963, 0.2955242247147529, 0.2955242247147529, ...
        0.2692667193099963, 0.2190863625159820, 0.1494513491505806, ...
        0.0666713443086881];
[GX1,GX2,GY1,GY2,GZ1,GZ2] = ndgrid(gp10,gp10,gp10,gp10,gp10,gp10);
[W1,W2,W3,W4,W5,W6] = ndgrid(w10,w10,w10,w10,w10,w10);
Wtot = W1.*W2.*W3.*W4.*W5.*W6;
Xm1 = (L/2)*GX1 + L/2; Xm2 = (L/2)*GX2 + L/2;
Ysc1 = (h/2)*GY1; Ysc2 = (h/2)*GY2;
% Zsc1 = (b/2)*GZ1; Zsc2 = (b/2)*GZ2;
coefVol = (h^2/4)*(L^2/4)*(b^2/4);
% Pre-calc Powers (Vectorization)
X1pow = zeros([size(Xm1), NW]); X2pow = zeros([size(Xm2), NW]);
for p=1:NW, X1pow(:, :, :, :, p)=Xm1.^(p-1); X2pow(:, :, :, :, p)=Xm2.^(p-1);
end
Ysq = (Ysc1.^2) .* (Ysc2.^2);
% --- Main Loop ---
COV1 = zeros(1, length(dz)); COV2 = zeros(1, length(dz));
COV3 = zeros(1, length(dz)); COV4 = zeros(1, length(dz));
for tt = 1:length(dz)
    set(hObject, 'String', sprintf('Tinh d=%.2f...', dz(tt))); drawnow;
    dx_val = dz(tt);
    dy_val = dz(tt);

```

```

EX = zeros(NW, NW, m, m);
for e1 = 1:m
    for e2 = 1:m
        Delta = L*(e2 - e1);
        % Tinh Rff tren luoi 6D (WARNING: RAM HEAVY)
        Rff = sigma^2 .* exp( -abs(((L/2)*(GX2-GX1)+Delta)/dx_val) ...
            -abs((h/2)*(GY2-GY1)/dy_val) ...
            -abs((b/2)*(GZ2-GZ1)/dz(tt)) );
        Base = coefVol * Ysq .* Rff .* Wtot;
        for i1 = 1:NW
            for i2 = 1:NW
                integrand = X1pow(:, :, :, :, i1) .* X2pow(:, :, :, :, i2) .* Base;
                EX(i1,i2,e1,e2) = sum(integrand(:));
            end
        end
    end
end
V1=0; V2=0; V3=0; V4=0;
for i1=1:NW
    for i2=1:NW
        M = squeeze(EX(i1,i2,:,:));
        V1 = V1 + (s1(:,i1)' * M * s1(:,i2));
        V2 = V2 + (s2(:,i1)' * M * s2(:,i2));
        V3 = V3 + (s3(:,i1)' * M * s3(:,i2));
        V4 = V4 + (s4(:,i1)' * M * s4(:,i2));
    end
end
COV1(tt) = sqrt(max(0,V1))/TR1; COV2(tt) = sqrt(max(0,V2))/TR2;
COV3(tt) = sqrt(max(0,V3))/TR3; COV4(tt) = sqrt(max(0,V4))/TR4;
end
% --- VE DO THI (4 PLOTS) ---
axes(myHandles.Ax1); cla;
semilogx(ratios, COV1, '-bs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('Case 1: C-F (Ngam - Tu do)'); ylabel('COV');
if max(COV1)>0, ylim([min(COV1)*0.8, max(COV1)*1.2]); end
axes(myHandles.Ax2); cla;
semilogx(ratios, COV2, '-rs', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('Case 2: H-H (Khop - Khop)'); ylabel('COV');
if max(COV2)>0, ylim([min(COV2)*0.8, max(COV2)*1.2]); end
axes(myHandles.Ax3); cla;
semilogx(ratios, COV3, '-g^', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('Case 3: C-C (Ngam - Ngam)'); ylabel('COV'); xlabel('Ty le \lambda =
d_x/L');

```

```

if max(COV3)>0, ylim([min(COV3)*0.8, max(COV3)*1.2]); end
axes(myHandles.Ax4); cla;
semilogx(ratios, COV4, '-md', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 5);
grid on; set(gca, 'XMinorGrid', 'on', 'YMinorGrid', 'on');
title('Case 4: C-H (Ngam - Khop)'); ylabel('COV'); xlabel('Ty le \lambda =
d_x/L');
if max(COV4)>0, ylim([min(COV4)*0.8, max(COV4)*1.2]); end
set(hObject, 'String', 'CHAY TINH TOAN', 'Enable', 'on');
% --- LUU DU LIEU VAO HANDLES DE XUAT EXCEL ---
Res.ratios = ratios; Res.dx = dz;
Res.COV1 = COV1; Res.COV2 = COV2; Res.COV3 = COV3; Res.COV4 =
COV4;
Res.inputs = [L1, m, h, b, E0, sigma];
myHandles.Results = Res;
guidata(hMain, myHandles);

set(myHandles.hBtnExcel, 'Enable', 'on');
msgbox('Tinh toan xong! Hay bam nut XUAT EXCEL de luu ket qua.', 'Thong
bao');
catch err
    set(hObject, 'String', 'CHAY TINH TOAN', 'Enable', 'on');
    errorldg(err.message, 'Loi chuong trinh');
end
end
% --- 2. EXCEL EXPORT CALLBACK ---
function export_excel_callback(~, ~)
    data = guidata(gcf);
    if ~isfield(data, 'Results'), errorldg('Khong co du lieu!', 'Loi'); return; end
    Res = data.Results;
    [file, path] = uiputfile('*.xls', 'Luu ket qua Buckling 3D');
    if isequal(file, 0), return; end
    fullPath = fullfile(path, file);
    try
        if exist(fullPath, 'file')
            fid = fopen(fullPath, 'a');
            if fid == -1, errorldg('File dang mo! Hay dong file Excel lai.', 'Loi'); return; end
            fclose(fid);
        end
        Header = {'Ty_le_d_L', 'dx_m', 'COV_CF', 'COV_HH', 'COV_CC', 'COV_CH'};
        Values = [Res.ratios(:), Res.dx(:), Res.COV1(:), Res.COV2(:), Res.COV3(:),
Res.COV4(:)];
        data_cell = [Header; num2cell(Values)];
        xlswrite(fullPath, data_cell, 'KetQua');
        ParamHeader = {'ThongSo', 'GiaTri'; 'L', Res.inputs(1); 'm', Res.inputs(2);
            'h', Res.inputs(3); 'b', Res.inputs(4); 'E0', Res.inputs(5); 'Sigma',
Res.inputs(6)};
        xlswrite(fullPath, ParamHeader, 'ThongSoDauVao');

```

```

        msgbox(['Da luu file thanh cong: ' fullPath], 'Thong bao');
    catch err
        errordlg(['Loi xuat file: ' err.message], 'Loi');
    end
end
% --- 3. ROBUST BUCKLING SOLVER
function [TR, Phi_full] = solve_buckling(K_sub, KP_sub, full_size, indices)
    % Goi ham eig truc tiep cua MATLAB, tra ve Vector (V) va Gia tri rieng (D)
    [V, D] = eig(K_sub, KP_sub);
    % Trich xuat cac gia tri rieng va sap xep
    lambdas = diag(D);
    [lambdas_sorted, sort_idx] = sort(lambdas);
    % Gia tri rieng nho nhat chinh la Tai trong toi han (Critical Buckling Load)
    TR = lambdas_sorted(1);
    % Vector rieng (Mode shape) tuong ung voi TR
    phi_part = V(:, sort_idx(1));
    % Chuan hoa theo Ma tran do cung hinh hoc (KP_sub)
    a = sqrt(phi_part' * KP_sub * phi_part);
    phi_part = phi_part / a;
    % Ghep vao vector kich thuoc day du
    Phi_full = zeros(full_size, 1);
    Phi_full(indices) = phi_part;
end
end

```